Optimisation polynomiale via la programmation semidéfinie et construction de Gelfand-Naimark-Segal tronquée

Markus Schweighofer

Universität Konstanz

Séminaire Parisien d'Optimisation
Institut Henri Poincaré
18 mars 2013

Problèmes d'optimisation

Un problème de minimisation est de la forme

$$(P) \qquad \text{minimiser } f(x) \text{ sous la contrainte } x \in S$$

Problèmes d'optimisation

Un problème de minimisation est de la forme

$$(P) \qquad \text{minimiser } f(x) \text{ sous la contrainte } x \in S$$

où

- S est un ensemble (l'ensemble admissible) et

Problèmes d'optimisation

Un problème de minimisation est de la forme

$$(P) \qquad \text{minimiser } f(x) \text{ sous la contrainte } x \in S$$

où

- S est un ensemble (l'ensemble admissible) et
- $f : S \to \mathbb{R}$ est une fonction (l'objective ou le critère).

Problèmes d'optimisation

Un problème de minimisation est de la forme

$$(P) \qquad \text{minimiser } f(x) \text{ sous la contrainte } x \in S$$

où

- S est un ensemble (l'ensemble admissible) et
- $f : S \to \mathbb{R}$ est une fonction (l'objective ou le critère).

Tout $x \in S$ est appelé un point admissible pour (P).

Problèmes d'optimisation

Un problème de minimisation est de la forme

$$(P) \qquad \text{minimiser } f(x) \text{ sous la contrainte } x \in S$$

où

- S est un ensemble (l'ensemble admissible) et
- $f : S \to \mathbb{R}$ est une fonction (l'objective ou le critère).

Tout $x \in S$ est appelé un point admissible pour (P).

On s'intéresse à la valeur optimale

Problèmes d'optimisation

Un problème de minimisation est de la forme

$$(P) \qquad \text{minimiser } f(x) \text{ sous la contrainte } x \in S$$

où

- S est un ensemble (l'ensemble admissible) et
- $f: S \to \mathbb{R}$ est une fonction (l'objective ou le critère).

Tout $x \in S$ est appelé un point admissible pour (P).

On s'intéresse à la valeur optimale

$$P^* := \inf\{f(x) \mid x \in S\}$$

Problèmes d'optimisation

Un problème de minimisation est de la forme

$$(P) \qquad \text{minimiser } f(x) \text{ sous la contrainte } x \in S$$

où

- S est un ensemble (l'ensemble admissible) et
- $f : S \to \mathbb{R}$ est une fonction (l'objective ou le critère).

Tout $x \in S$ est appelé un point admissible pour (P).

On s'intéresse à la valeur optimale

$$P^* := \inf\{f(x) \mid x \in S\} \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

de (P).

Problèmes d'optimisation

Un problème de maximisation est de la forme

$$(P) \qquad \text{maximiser } f(x) \text{ sous la contrainte } x \in S$$

où

- S est un ensemble (l'ensemble admissible) et
- $f : S \to \mathbb{R}$ est une fonction (l'objective ou le critère).

Tout $x \in S$ est appelé un point admissible pour (P).

On s'intéresse à la valeur optimale

$$P^* := \sup\{f(x) \mid x \in S\} \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

de (P).

Problèmes d'optimisation

Un problème de maximisation est de la forme

$$(P) \qquad \text{maximiser } f(x) \text{ sous la contrainte } x \in S$$

où

- S est un ensemble (l'ensemble admissible) et
- $f : S \to \mathbb{R}$ est une fonction (l'objective ou le critère).

Tout $x \in S$ est appelé un point admissible pour (P).

On s'intéresse à la valeur optimale

$$P^* := \sup\{f(x) \mid x \in S\} \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

de (P).

Problèmes d'optimisation

Un problème de minimisation est de la forme

$$(P) \qquad \text{minimiser } f(x) \text{ sous la contrainte } x \in S$$

où

- S est un ensemble (l'ensemble admissible) et
- $f : S \to \mathbb{R}$ est une fonction (l'objective ou le critère).

Tout $x \in S$ est appelé un point admissible pour (P).

On s'intéresse à la valeur optimale

$$P^* := \inf\{f(x) \mid x \in S\} \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

de (P).

Problèmes d'optimisation

Un problème de minimisation est de la forme

$$(P) \qquad \text{minimiser } f(x) \text{ sous la contrainte } x \in S$$

où

- S est un ensemble (l'ensemble admissible) et
- $f : S \to \mathbb{R}$ est une fonction (l'objective ou le critère).

Tout $x \in S$ est appelé un point admissible pour (P).

On s'intéresse à la valeur optimale

$$P^* := \inf\{f(x) \mid x \in S\} \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

de (P).

De plus, on s'intéresse aux solutions de (P),

Problèmes d'optimisation

Un problème de minimisation est de la forme

$$(P) \qquad \text{minimiser } f(x) \text{ sous la contrainte } x \in S$$

où

- S est un ensemble (l'ensemble admissible) et
- $f : S \to \mathbb{R}$ est une fonction (l'objective ou le critère).

Tout $x \in S$ est appelé un point admissible pour (P).

On s'intéresse à la valeur optimale

$$P^* := \inf\{f(x) \mid x \in S\} \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

de (P).

De plus, on s'intéresse aux solutions de (P),
c'est-à-dire aux $x^* \in S$ tels que $f(x^*) = P^*$.

Problèmes d'optimisation polynomiales (POP)

Un problème d'optimisation polynomiale est da la forme

$$(P) \quad \text{minimiser } f(x) \text{ parmi les } x \in \mathbb{R}^n \text{ s.c. } p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0$$

Problèmes d'optimisation polynomiales (POP)

Un problème d'optimisation polynomiale est da la forme

$$(P) \quad \text{minimiser } f(x) \text{ parmi les } x \in \mathbb{R}^n \text{ s.c. } p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0$$

où

- $n \in \mathbb{N}_0$ est le nombre de variables,

Problèmes d'optimisation polynomiales (POP)

Un problème d'optimisation polynomiale est da la forme

$$(P) \quad \text{minimiser } f(x) \text{ parmi les } x \in \mathbb{R}^n \text{ s.c. } p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0$$

où

- $n \in \mathbb{N}_0$ est le nombre de variables,
- $f \in \mathbb{R}[\underline{X}] := \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ est l'objectif,

Problèmes d'optimisation polynomiales (POP)

Un problème d'optimisation polynomiale est da la forme

(P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in \mathbb{R}^n$ s.c. $p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0$

où

- $n \in \mathbb{N}_0$ est le nombre de variables,
- $f \in \mathbb{R}[\underline{X}] := \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ est l'objectif,
- $m \in \mathbb{N}_0$ est le nombre de contraintes et

Problèmes d'optimisation polynomiales (POP)

Un problème d'optimisation polynomiale est da la forme

(P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in \mathbb{R}^n$ s.c. $p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0$

où

- $n \in \mathbb{N}_0$ est le nombre de variables,
- $f \in \mathbb{R}[\underline{X}] := \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ est l'objectif,
- $m \in \mathbb{N}_0$ est le nombre de contraintes et
- $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$.

Problèmes d'optimisation polynomiales (POP)

Un problème d'optimisation polynomiale est da la forme

$$(P) \quad \text{minimiser } f(x) \text{ parmi les } x \in \mathbb{R}^n \text{ s.c. } p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0$$

où

- $n \in \mathbb{N}_0$ est le nombre de variables,
- $f \in \mathbb{R}[\underline{X}] := \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ est l'objectif,
- $m \in \mathbb{N}_0$ est le nombre de contraintes et
- $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$.

Les ensembles admissibles $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0\}$ des problèmes d'optimisation polynomiales sont aussi appelés les fermés semialgébriques de base.

Problèmes d'optimisation polynomiales (POP)

Un problème d'optimisation polynomiale est da la forme

$$(P) \quad \text{minimiser } f(x) \text{ parmi les } x \in \mathbb{R}^n \text{ s.c. } p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0$$

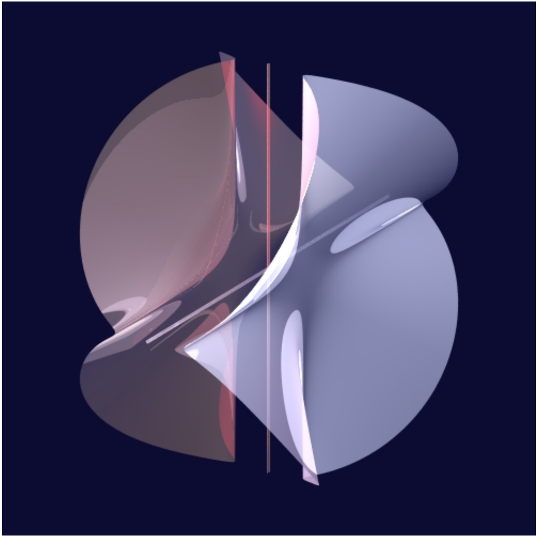
où

- $n \in \mathbb{N}_0$ est le nombre de variables,
- $f \in \mathbb{R}[\underline{X}] := \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ est l'objectif,
- $m \in \mathbb{N}_0$ est le nombre de contraintes et
- $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$.

Les ensembles admissibles $\{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0\}$ des problèmes d'optimisation polynomiales sont aussi appelés les fermés semialgébriques de base. Ils sont donnés par un système d'inégalités polynomiales.

Système d'inégalités polynomiales

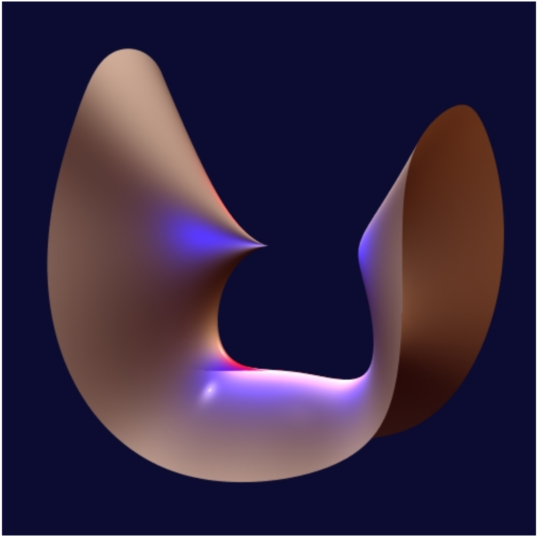
$$x_1^4 - x_1^2 - x_2^2 x_3^2 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 25$$



http://www1-c703.uibk.ac.at/mathematik/project/bildergalerie/gallery.html

Système d'inégalités polynomiales

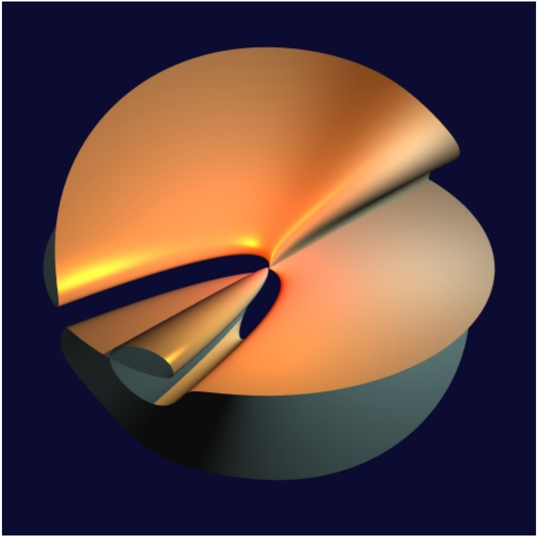
$$x_1^2 - x_1^3 + x_2^2 + x_2^4 + x_3^3 - x_3^4 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4$$



http://www1-c703.uibk.ac.at/mathematik/project/bildergalerie/gallery.html

Système d'inégalités polynomiales

$$x_1^3x_3 + x_1^2 + x_2x_3^3 + x_3^4 = 3x_1x_2x_3,\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4$$



http://www1-c703.uibk.ac.at/mathematik/project/bildergalerie/gallery.html

Problème d'optimisation linéaire (PL)

Un problème d'optimisation linéaire ou programme linéaire (PL) est un problème d'optimisation polynomiale où et l'objectif et les contraintes sont de degré 1 au plus.

Problème d'optimisation linéaire (PL)

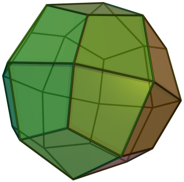
Un problème d'optimisation linéaire ou programme linéaire (PL) est un problème d'optimisation polynomiale où et l'objectif et les contraintes sont de degré 1 au plus.

Les ensembles admissibles des PL sont les polyèdres.

Problème d'optimisation linéaire (PL)

Un problème d'optimisation linéaire ou programme linéaire (PL) est un problème d'optimisation polynomiale où et l'objectif et les contraintes sont de degré 1 au plus.

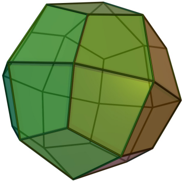
Les ensembles admissibles des PL sont les polyèdres. Ils sont donné par des systèmes d'inégalités linéaires.



Problème d'optimisation linéaire (PL)

Un problème d'optimisation linéaire ou programme linéaire (PL) est un problème d'optimisation polynomiale où et l'objectif et les contraintes sont de degré 1 au plus.

Les ensembles admissibles des PL sont les polyèdres. Ils sont donné par des systèmes d'inégalités linéaires.

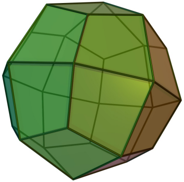


En 1979, Leonid Genrikhovich Khachiyan [*1952, †2005] a montré qu'on peut résoudre les PL efficacement (en temps polynomial).

Problème d'optimisation linéaire (PL)

Un problème d'optimisation linéaire ou programme linéaire (PL) est un problème d'optimisation polynomiale où et l'objectif et les contraintes sont de degré 1 au plus.

Les ensembles admissibles des PL sont les polyèdres. Ils sont donné par des systèmes d'inégalités linéaires.



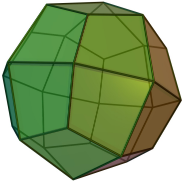
En 1979, Leonid Genrikhovich Khachiyan [*1952, †2005] a montré qu'on peut résoudre les PL efficacement (en temps polynomial).

Dans la pratique, on peut résoudre des PL avec $n \approx m \approx 10^6$.

Problème d'optimisation linéaire (PL)

Un problème d'optimisation linéaire ou programme linéaire (PL) est un problème d'optimisation polynomiale où et l'objectif et les contraintes sont de degré 1 au plus.

Les ensembles admissibles des PL sont les polyèdres. Ils sont donné par des systèmes d'inégalités linéaires.



En 1979, Leonid Genrikhovich Khachiyan [*1952, †2005] a montré qu'on peut résoudre les PL efficacement (en temps polynomial).

Dans la pratique, on peut résoudre des PL avec $n \approx m \approx 10^6$.

Peut-on ramener un POP à un PL ?

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & x_1x_2^2 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\text{s.c.} & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
& -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
& 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & 2x_1x_2^2 & \geq & 0 \\
& 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & x_1x_2^2 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\text{s.c.} & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & 2x_1x_2^2 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & & \\[1em]
\text{parmi les} & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\[1em]
\text{s.c.} & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & & \\
\text{parmi les} & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\[1em]
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\[1em]
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$\begin{array}{rrcrcrcrcc}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcll}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcc}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
& -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
& 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
& 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\[1em]
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\[1em]
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\[1em]
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\[1em]
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & {\color{red}x_2^3x_4^2} & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 \\
& -x_1 & - & {\color{red} x_1x_2^6} & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
& 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
& 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\[1em]
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\[1em]
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 \\
& -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
& 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
& 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\[1em]
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\[1em]
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7{\color{red}x_1x_2x_4^2} & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\[1em]
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\[1em]
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\[1em]
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\[1em]
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & {\color{red}x_1x_3^2} & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\[1em]
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\[1em]
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\[1em]
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\[1em]
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcc}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcc}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3y_{12} & + & 7 & & \\[1em]
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\[1em]
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3y_{12} & + & 7 & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière bien trop naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3y_{12} & + & 7 & & \\[1em]
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x \in \mathbb{R}^4, y \in \mathbb{R}^{12}} \\[1em]
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & 2y_1 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcll}
\text{minimiser} & x_1x_2^2 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\text{s.c.} & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & E
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
\text{minimiser} & x_1x_2^2 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 & F
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & x_1x_2^2 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\[2em]
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\[2em]
\text{s.c.} & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & x_1x_2 & + & \ldots & \geq 0 & G
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcll}
\text{minimiser} & x_1x_2^2 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & \color{red}{A} \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & \color{red}{B} \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 & \color{red}{D} \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & \color{red}{E} \\
\color{blue}{A \cdot B} & -2x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 & \color{blue}{F} \\
\color{blue}{C^2} & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & x_1x_2 & + & \dots & \geq & 0 & \color{blue}{G} \\
\color{blue}{C^2 \cdot D} & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & \color{blue}{H}
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & x_1x_2^2 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & & \\
\text{parmi les} & \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} & & & & \\
\text{s.c.} & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & x_1x_2 & + & \ldots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18x_1x_2^2 & + & \ldots & \geq & 0 & I
\end{array}$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcll}
\text{minimiser} & x_1x_2^2 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\text{s.c.} & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & x_1x_2 & + & \ldots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18x_1x_2^2 & + & \ldots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcll}
\text{minimiser} & y_1 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & x_1x_2 & + & \ldots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \ldots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcll}
\text{minimiser} & y_1 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\[2ex]
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\[2ex]
\text{s.c.} & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & x_1x_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
\text{minimiser} & y_1 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcccl}
\text{minimiser} & y_1 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & & \\[1em]
\text{parmi les} & \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} & & & & \\[1em]
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6{\color{red}x_2^2} & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & {\color{red}A} \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & {\color{red}B} \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}{\color{red}x_2^2} & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 & {\color{red}D} \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & {\color{red}E} \\
{\color{blue}A \cdot B} & -2x_1^2x_2 & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 & {\color{blue}F} \\
{\color{blue}C^2} & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 & {\color{blue}G} \\
{\color{blue}C^2 \cdot D} & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & {\color{blue}H} \\
{\color{blue}A \cdot B \cdot E} & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & {\color{blue}I}
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & x_1 x_2 x_3^5 & - & 3x_1 x_2^8 x_3 & + & 7 & & & & \\[1em]
\text{parmi les} & \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} & & & & \\[1em]
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & x_2 x_3^3 & + & x_2^3 x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1 x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1 x_2 x_4^2 & - & \frac{1}{2} y_3 & + & x_1 x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2 x_3^4 & + & x_1 x_3 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2 x_2 & - & 6y_1 & - & 2x_1^2 x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \ldots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2 x_2^2 & + & \frac{1}{2} x_1 x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2 x_2 & - & 6x_1^3 x_2 & + & 18y_1 & + & \ldots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$\begin{array}{rrcrcrcrcll}
\text{minimiser} & y_1 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\[2ex]
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\[2ex]
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \ldots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \ldots & \geq & 0 & I
\end{array}$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrccl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\[1em]
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\[1em]
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \dots & \geq 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \dots & \geq 0 & I
\end{array}$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \ldots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \ldots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcll}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \ldots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \ldots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$\begin{array}{rrcrcrcrcccl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} & & & & \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrr}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
& & & & & & & & & & \\
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
& & & & & & & & & & \\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
& -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
& 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 & D \\
& 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcll}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \ldots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \ldots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$\begin{array}{rrcrcrcrcll}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \ldots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \ldots & \geq & 0 & I
\end{array}$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \ldots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \ldots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcccl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} & & & \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$\begin{array}{rrcrcrcrcll}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & {\color{red}A} \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & {\color{red}B} \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & {\color{red}x_1x_3^2} & - & \ldots & \geq & 0 & {\color{red}D} \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & {\color{red}E} \\
{\color{blue}A \cdot B} & -2x_1^2x_2 & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 & {\color{blue}F} \\
{\color{blue}C^2} & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \ldots & \geq & 0 & {\color{blue}G} \\
{\color{blue}C^2 \cdot D} & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & {\color{blue}H} \\
{\color{blue}A \cdot B \cdot E} & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \ldots & \geq & 0 & {\color{blue}I}
\end{array}$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\[2ex]
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\[2ex]
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \ldots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \ldots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcll}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & \color{red}{A} \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & \color{red}{B} \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \dots & \geq & 0 & \color{red}{D} \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & \color{red}{E} \\
\color{blue}{A \cdot B} & -2x_1^2x_2 & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 & \color{blue}{F} \\
\color{blue}{C^2} & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 & \color{blue}{G} \\
\color{blue}{C^2 \cdot D} & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & \color{blue}{H} \\
\color{blue}{A \cdot B \cdot E} & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & \color{blue}{I}
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & & \color{red}{A} \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & & \color{red}{B} \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \ldots & \geq & 0 & & \color{red}{D} \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & & \color{red}{E} \\
\color{blue}{A \cdot B} & -2\color{red}{x_1^2x_2} & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 & & \color{blue}{F} \\
\color{blue}{C^2} & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \ldots & \geq & 0 & & \color{blue}{G} \\
\color{blue}{C^2 \cdot D} & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & & \color{blue}{H} \\
\color{blue}{A \cdot B \cdot E} & 6\color{red}{x_1^2x_2} & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \ldots & \geq & 0 & & \color{blue}{I}
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & & \\[1em]
\text{parmi les} & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\[1em]
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2y_{12} & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6y_{12} & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2y_{12} & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6y_{12} & - & 6x_1^3x_2 & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2y_{12} & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \ldots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6y_{12} & - & 6y_{13} & + & 18y_1 & + & \ldots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\[1em]
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\[1em]
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2y_{12} & - & 6y_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \ldots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6y_{12} & - & 6y_{13} & + & 18y_1 & + & \ldots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & & \\
\text{parmi les} & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & & B \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \dots & \geq & 0 & & D \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & & E \\
A \cdot B & -2y_{12} & - & 6y_1 & - & 2y_{14} & - & \dots & \geq & 0 & & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 & & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & & H \\
A \cdot B \cdot E & 6y_{12} & - & 6y_{13} & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & & \\[1em]
\text{parmi les} & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\[1em]
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2y_{12} & - & 6y_1 & - & 2y_{14} & - & \ldots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \ldots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6y_{12} & - & 6y_{13} & + & 18y_1 & + & \ldots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq 0 & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq 0 & B \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \ldots & \geq 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq 0 & E \\
A \cdot B & -2y_{12} & - & 6y_1 & - & 2y_{14} & - & \ldots & \geq 0 & F \\
C^2 & 2y_{15} & + & x_2^4 & - & y_2 & + & \ldots & \geq 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6y_{12} & - & 6y_{13} & + & 18y_1 & + & \ldots & \geq 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & {\color{red}A} \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & {\color{red}B} \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \dots & \geq & 0 & {\color{red}D} \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & {\color{red}E} \\
{\color{blue}A \cdot B} & -2y_{12} & - & 6y_1 & - & 2y_{14} & - & \dots & \geq & 0 & {\color{blue}F} \\
{\color{blue}C^2} & 2y_{15} & + & {\color{red}x_2^4} & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 & {\color{blue}G} \\
{\color{blue}C^2 \cdot D} & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & {\color{blue}H} \\
{\color{blue}A \cdot B \cdot E} & 6y_{12} & - & 6y_{13} & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & {\color{blue}I}
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2y_{12} & - & 6y_1 & - & 2y_{14} & - & \ldots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2y_{15} & + & y_{16} & - & y_2 & + & \ldots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6y_{12} & - & 6y_{13} & + & 18y_1 & + & \ldots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcll}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2y_{12} & - & 6y_1 & - & 2y_{14} & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2y_{15} & + & y_{16} & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6y_{12} & - & 6y_{13} & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2y_{12} & - & 6y_1 & - & 2y_{14} & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2y_{15} & + & y_{16} & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & y_{17} & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6y_{12} & - & 6y_{13} & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\[1em]
\text{parmi les} & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\[1em]
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 \quad A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \quad B \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \dots & \geq & 0 \quad D \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 \quad E \\
A \cdot B & -2y_{12} & - & 6y_1 & - & 2y_{14} & - & \dots & \geq & 0 \quad F \\
C^2 & 2y_{15} & + & y_{16} & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 \quad G \\
C^2 \cdot D & y_{17} & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 \quad H \\
A \cdot B \cdot E & 6y_{12} & - & 6y_{13} & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 \quad I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2y_{12} & - & 6y_1 & - & 2y_{14} & - & \ldots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2y_{15} & + & y_{16} & - & y_2 & + & \ldots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & y_{17} & + & \frac{1}{2}y_{18} & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6y_{12} & - & 6y_{13} & + & 18y_1 & + & \ldots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcll}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\text{parmi les} & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} & & & & & \\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2y_{12} & - & 6y_1 & - & 2y_{14} & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2y_{15} & + & y_{16} & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & y_{17} & + & \frac{1}{2}y_{18} & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6y_{12} & - & 6y_{13} & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2y_{12} & - & 6y_1 & - & 2y_{14} & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2y_{15} & + & y_{16} & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & y_{17} & + & \frac{1}{2}y_{18} & - & 3y_{19} & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6y_{12} & - & 6y_{13} & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcll}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} \\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2y_{12} & - & 6y_1 & - & 2y_{14} & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2y_{15} & + & y_{16} & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & y_{17} & + & \frac{1}{2}y_{18} & - & 3y_{19} & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6y_{12} & - & 6y_{13} & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3y_{20} & + & 7 & & & \\[1em]
\text{parmi les} & \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}} & & & \\[1em]
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2y_{12} & - & 6y_1 & - & 2y_{14} & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2y_{15} & + & y_{16} & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & y_{17} & + & \frac{1}{2}y_{18} & - & 3y_{19} & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6y_{12} & - & 6y_{13} & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcll}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3y_{20} & + & 7 & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x \in \mathbb{R}^4, y \in \mathbb{R}^{20}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2y_{12} & - & 6y_1 & - & 2y_{14} & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2y_{15} & + & y_{16} & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & y_{17} & + & \frac{1}{2}y_{18} & - & 3y_{19} & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6y_{12} & - & 6y_{13} & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcll}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3y_{20} & + & 7 & & & \\
\\
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x \in \mathbb{R}^4, y \in \mathbb{R}^{20}} \\
\\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2y_{12} & - & 6y_1 & - & 2y_{14} & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2y_{15} & + & y_{16} & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & y_{17} & + & \frac{1}{2}y_{18} & - & 3y_{19} & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6y_{12} & - & 6y_{13} & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Idée : Les inégalités bleues sont a priori redondantes

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
\text{minimiser} & y_1 & + & y_4 & - & 3y_{20} & + & 7 & & & \\
\text{parmi les} & \multicolumn{10}{l}{x \in \mathbb{R}^4, y \in \mathbb{R}^{20}} \\
\text{s.c.} & 2y_2 & + & 6y_3 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & y_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7y_9 & - & \frac{1}{2}y_3 & + & y_{10} & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6y_{11} & + & y_5 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2y_{12} & - & 6y_1 & - & 2y_{14} & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2y_{15} & + & y_{16} & - & y_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & y_{17} & + & \frac{1}{2}y_{18} & - & 3y_{19} & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6y_{12} & - & 6y_{13} & + & 18y_1 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$

Idée : Les inégalités bleues sont a priori redondantes mais donnent des informations importantes à l'issue de la linéarisation.

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

Le Positivstellensatz en géométrie algébrique réelle

Dans sa première œuvre, l'éblouissante Anneaux préordonnés, Jean-Louis Krivine a demontré en 1964 le théorème dit Positivstellensatz

1.

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

Le Positivstellensatz en géométrie algébrique réelle

Dans sa première œuvre, l'éblouissante Anneaux préordonnés, Jean-Louis Krivine a demontré en 1964 le théorème dit Positivstellensatz qui équivaut essentiellement au fait suivant :

1.

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

Le Positivstellensatz en géométrie algébrique réelle

Dans sa première œuvre, l'éblouissante Anneaux préordonnés, Jean-Louis Krivine a demontré en 1964 le théorème dit Positivstellensatz qui équivaut essentiellement au fait suivant :

Pour tout POP non réalisable, lors du processus de linéarisation (moins naïf) qu'on vient de décrire, on peut toujours ajouter un nombre fini d'inégalités bleues de sorte que le PL qui en résulte n'est pas realisable.

1.

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

Le Positivstellensatz en géométrie algébrique réelle

Dans sa première œuvre, l'éblouissante Anneaux préordonnés, Jean-Louis Krivine a demontré en 1964 le théorème dit Positivstellensatz qui équivaut essentiellement au fait suivant :

Pour tout POP non réalisable, lors du processus de linéarisation (moins naïf) qu'on vient de décrire, on peut toujours ajouter un nombre fini d'inégalités bleues de sorte que le PL qui en résulte n'est pas realisable.

Le travail de Krivine arrivait trop tôt pour se faire remarquer. Il n'a été reconnu que 40 ans plus tard par Prestel. Désormais il peut être vu comme le début de l'algèbre réelle contemporaine.

1.

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

Le Positivstellensatz en géométrie algébrique réelle

Dans sa première œuvre, l'éblouissante Anneaux préordonnés, Jean-Louis Krivine a demontré en 1964 le théorème dit Positivstellensatz qui équivaut essentiellement au fait suivant :

Pour tout POP non réalisable, lors du processus de linéarisation (moins naïf) qu'on vient de décrire, on peut toujours ajouter un nombre fini d'inégalités bleues de sorte que le PL qui en résulte n'est pas realisable.

Le travail de Krivine arrivait trop tôt pour se faire remarquer. Il n'a été reconnu que 40 ans plus tard par Prestel. Désormais il peut être vu comme le début de l'algèbre réelle contemporaine. Il se base sur une généralisation de la solution d'Artin[1] du 17ème problème de Hilbert et sur l'élimination des quantificateurs sur les corps réels clos.

1. Tout polynôme positif en plusieurs variables s'écrit comme somme de carrés de fractions rationelles.

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

Le Positivstellensatz en géométrie algébrique réelle

Dans sa première œuvre, l'éblouissante Anneaux préordonnés, Jean-Louis Krivine a demontré en 1964 le théorème dit Positivstellensatz qui équivaut essentiellement au fait suivant :

Pour tout POP non réalisable, lors du processus de linéarisation (moins naïf) qu'on vient de décrire, on peut toujours ajouter un nombre fini d'inégalités bleues de sorte que le PL qui en résulte n'est pas realisable.

Le travail de Krivine arrivait trop tôt pour se faire remarquer. Il n'a été reconnu que 40 ans plus tard par Prestel. Désormais il peut être vu comme le début de l'algèbre réelle contemporaine. Il se base sur une généralisation de la solution d'Artin[1] du 17ème problème de Hilbert et sur l'élimination des quantificateurs sur les corps réels clos. Le résultat a été redécouvert une décennie plus tard et par Stengle et par Prestel.

---

1. Tout polynôme positif en plusieurs variables s'écrit comme somme de carrés de fractions rationelles.

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

Le Positivstellensatz de Schmüdgen

Le prochain progrès majeur était le Positivstellensatz de Schmüdgen publié en 1991 qui équivaut essentiellement au théorème suivant :

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

Le Positivstellensatz de Schmüdgen

Le prochain progrès majeur était le Positivstellensatz de Schmüdgen publié en 1991 qui équivaut essentiellement au théorème suivant :

Etant donné un POP dont l'ensemble admissible est compact, si on ajoute toutes les inégalités bleues lors du processus de linéarisation (moins naïf) qu'on vient de décrire,

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

Le Positivstellensatz de Schmüdgen

Le prochain progrès majeur était le Positivstellensatz de Schmüdgen publié en 1991 qui équivaut essentiellement au théorème suivant :

Etant donné un POP dont l'ensemble admissible est compact, si on ajoute toutes les inégalités bleues lors du processus de linéarisation (moins naïf) qu'on vient de décrire, alors les valeurs optimales du POP de départ et du «PL infinie» en déduit coïncident.

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

Le Positivstellensatz de Schmüdgen

Le prochain progrès majeur était le Positivstellensatz de Schmüdgen publié en 1991 qui équivaut essentiellement au théorème suivant :

Etant donné un POP dont l'ensemble admissible est compact, si on ajoute toutes les inégalités bleues lors du processus de linéarisation (moins naïf) qu'on vient de décrire, alors les valeurs optimales du POP de départ et du «PL infinie» en déduit coïncident.

Toutes les démonstrations utilisent le Positivstellensatz (de Krivine). La preuve originale de Schmüdgen utilise en plus de l'analyse fonctionnelle. En 1998, Wörmann a réussi de donner pour la première fois une démonstration algébrique.

Linéarisation d'un POP d'une manière déjà moins naïve

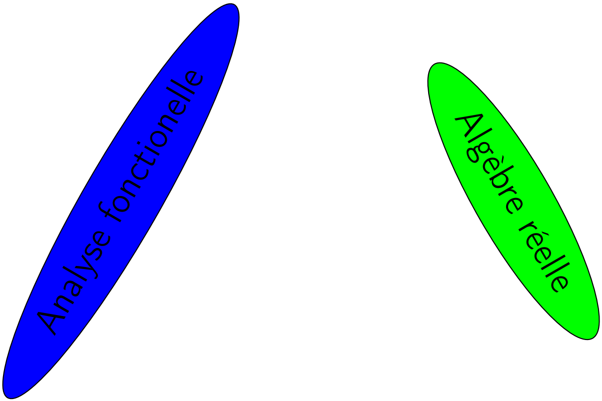
Le Positivstellensatz de Schmüdgen

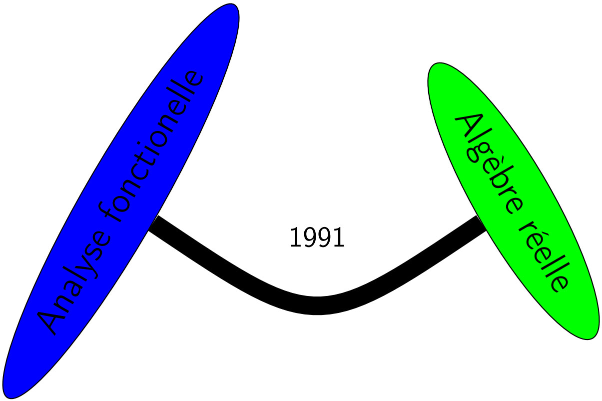
Le prochain progrès majeur était le Positivstellensatz de Schmüdgen publié en 1991 qui équivaut essentiellement au théorème suivant :

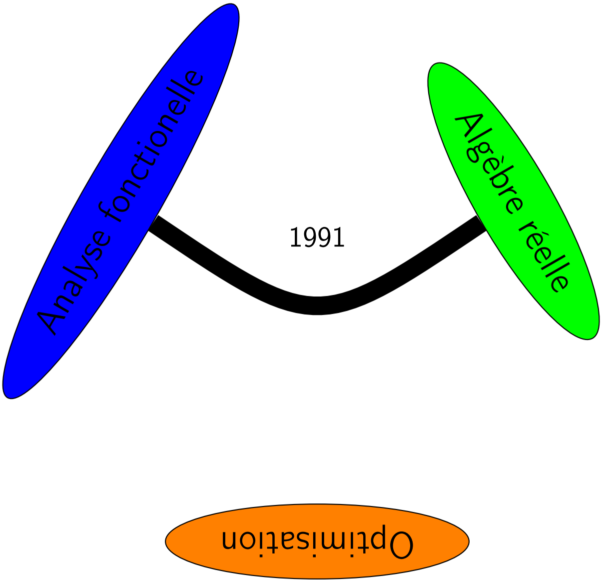
Etant donné un POP dont l'ensemble admissible est compact, si on ajoute toutes les inégalités bleues lors du processus de linéarisation (moins naïf) qu'on vient de décrire, alors les valeurs optimales du POP de départ et du «PL infinie» en déduit coïncident.

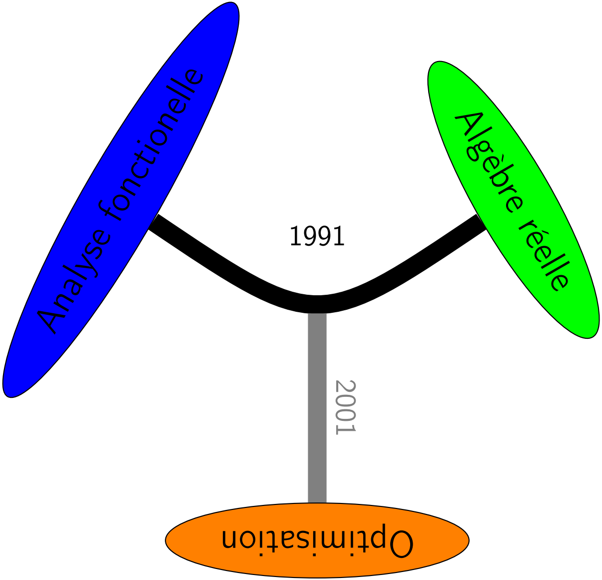
Toutes les démonstrations utilisent le Positivstellensatz (de Krivine). La preuve originale de Schmüdgen utilise en plus de l'analyse fonctionnelle. En 1998, Wörmann a réussi de donner pour la première fois une démonstration algébrique.

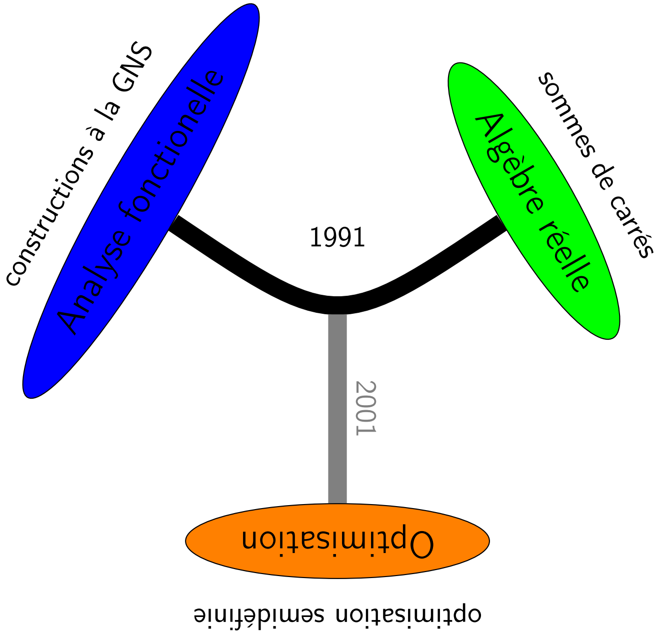
En 1993, Mihai Putinar a démontré qu'on n'a pas besoin des produits comme $A \cdot B$ dans le théorème de Schmüdgen si on remplace l'hypothèse de compacité par une condition technique plus forte, la condition archimédienne qui n'est pas loin de la compacité en pratique.

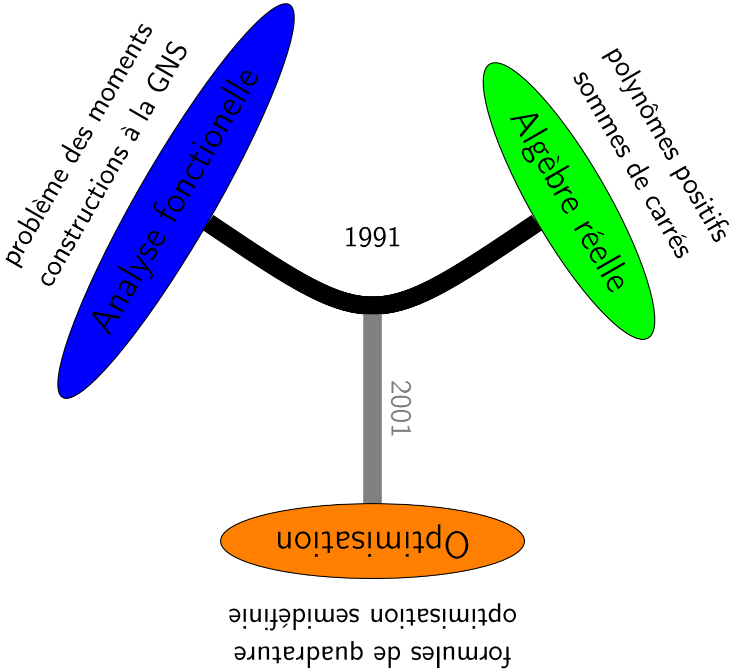

Analyse fonctionelle
Algèbre réelle


Analyse fonctionelle
1991
Algèbre réelle


Analyse fonctionelle
1991
Algèbre réelle
Optimisation


Analyse fonctionelle
Algèbre réelle
Optimisation
1991
2001


constructions à la GNS
Analyse fonctionelle
1991
Algèbre réelle
sommes de carrés
2001
Optimisation
optimisation semidéfinie

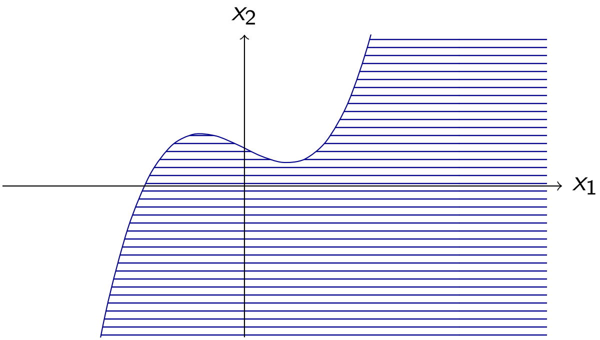

problème des moments
constructions à la GNS
Analyse fonctionelle
1991
Algèbre réelle
polynômes positifs
sommes de carrés
2001
Optimisation
optimisation semidéfinie
formules de quadrature

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr}
 & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
- & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
 & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

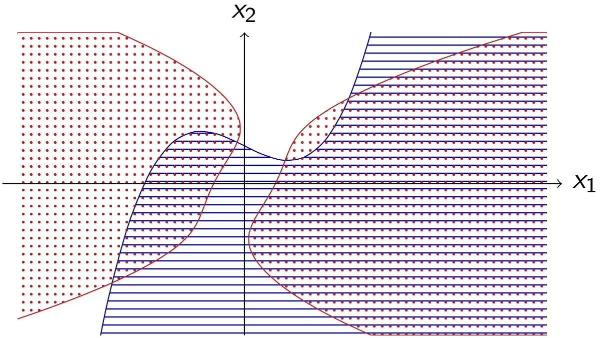
Système d'inégalités polynomiales

$$A \quad \begin{array}{rrrrrrrrrrr} & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\ - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\ & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \end{array}$$



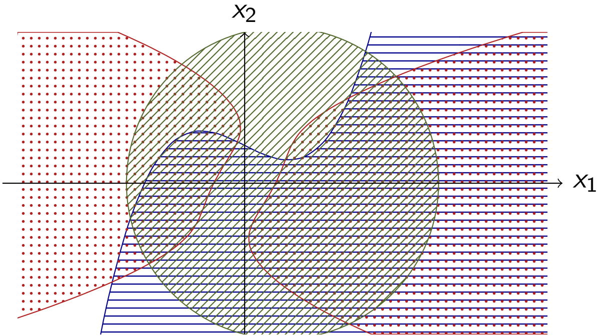
Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
 & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



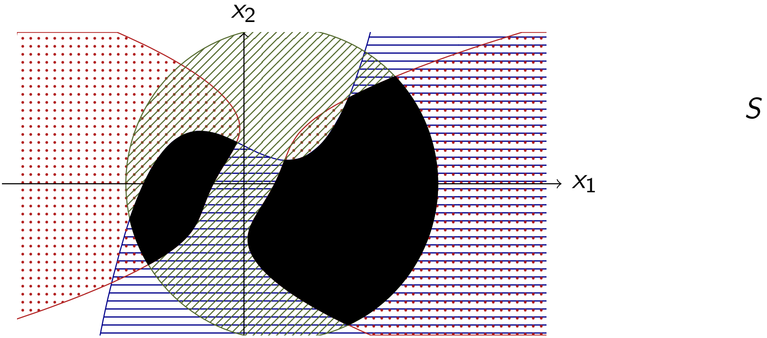
Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrr}
A & & & x_1^3 & - \; x_1 & - \; 2x_2 & + \; 1 & \geq 0 \\
B & - \; x_2^4 & + \; 2x_1^2 & - \; 2x_1x_2 & + \; x_2^2 & - \; \frac{1}{3} & & \geq 0 \\
C & & - \; x_1^2 & - \; x_2^2 & + \; x_1 & + \; 4 & & \geq 0
\end{array}
$$



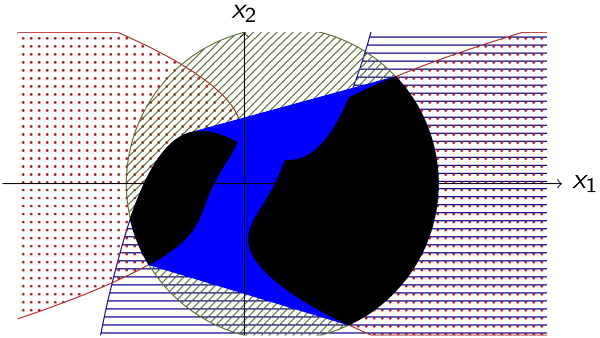
Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
A & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

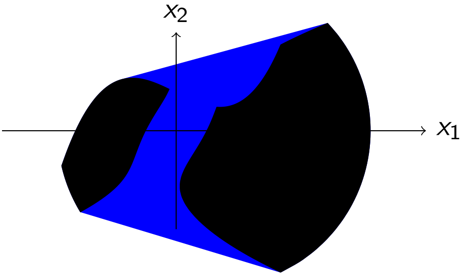


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
A & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

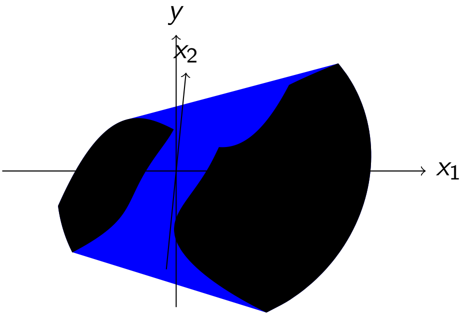


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & & \geq & 0
\end{array}
$$

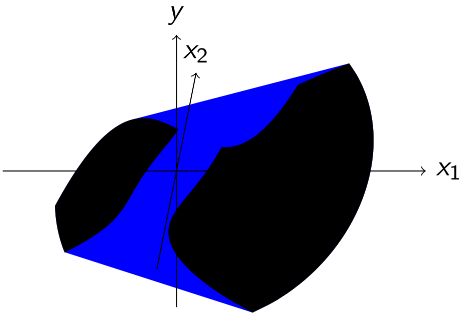


S

$\text{conv } S$

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
A & & x_1^3 & - \; x_1 & - \; 2x_2 & + \; 1 & \geq & 0 \\
B & -\; x_2^4 & + \; 2x_1^2 & - \; 2x_1x_2 & + \; x_2^2 & - \; \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & - \; x_1^2 & - \; x_2^2 & + \; x_1 & + \; 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

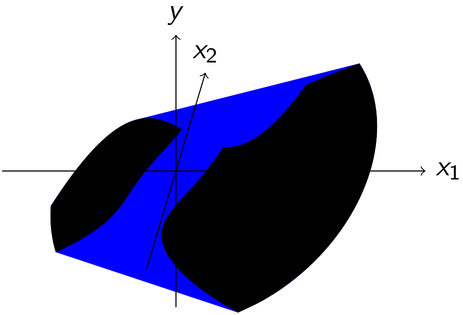


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrr}
A & & x_1^3 & - \; x_1 & - \; 2x_2 & + \; 1 & \geq & 0 \\
B & -x_2^4 & + \; 2x_1^2 & - \; 2x_1x_2 & + \; x_2^2 & - \; \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & -x_1^2 & - \; x_2^2 & + \; x_1 & + \; 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

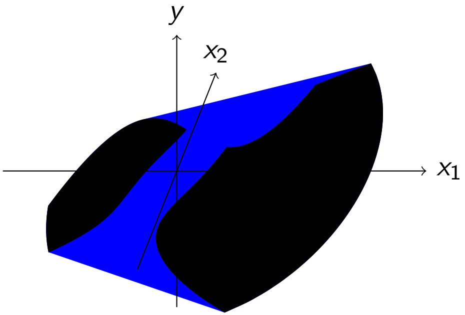


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$\begin{array}{lrrrrrrl}
A & & x_1^3 & - \; x_1 & - \; 2x_2 & + \; 1 & \geq & 0 \\
B & -\; x_2^4 & + \; 2x_1^2 & - \; 2x_1x_2 & + \; x_2^2 & - \; \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & -\; x_1^2 & - \; x_2^2 & + \; x_1 & + \; 4 & \geq & 0
\end{array}$$

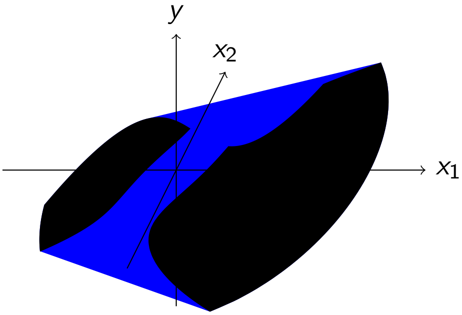


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrr}
A & & x_1^3 & - x_1 & - 2x_2 & + 1 & \geq & 0 \\
B & - x_2^4 & + 2x_1^2 & - 2x_1x_2 & + x_2^2 & - \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & - x_1^2 & - x_2^2 & + x_1 & + 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

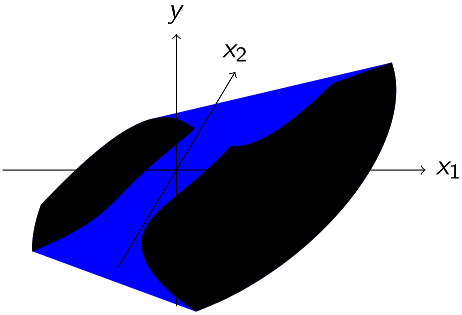


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

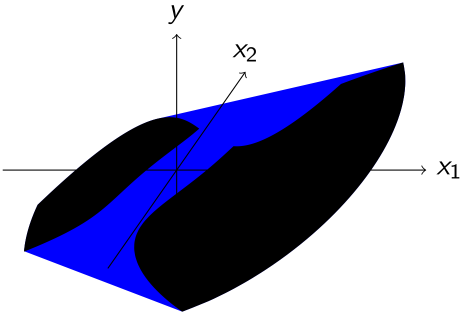


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
A & & x_1^3 & - x_1 & - 2x_2 & + 1 & \geq & 0 \\
B & - x_2^4 & + 2x_1^2 & - 2x_1x_2 & + x_2^2 & - \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & - x_1^2 & - x_2^2 & + x_1 & + 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

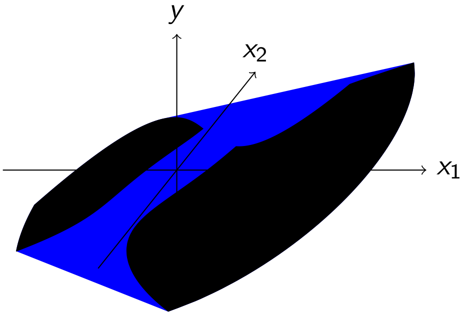


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$\begin{array}{lrrrrrrrrr}
A & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 \geq 0 \\
B & - & x_2^4 & + 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} \geq 0 \\
C & & & - x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 \geq 0
\end{array}$$

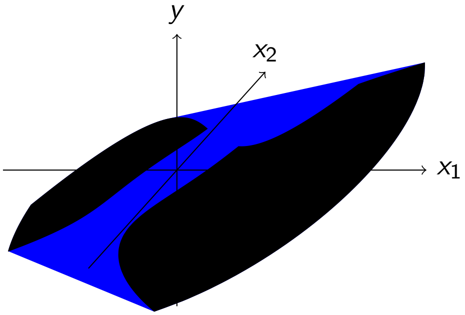


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
A & & x_1^3 & - \; x_1 & - \; 2x_2 & + \; 1 & & \geq 0 \\
B & - \; x_2^4 & + \; 2x_1^2 & - \; 2x_1x_2 & + \; x_2^2 & - \; \frac{1}{3} & & \geq 0 \\
C & & - \; x_1^2 & - \; x_2^2 & + \; x_1 & + \; 4 & & \geq 0
\end{array}
$$

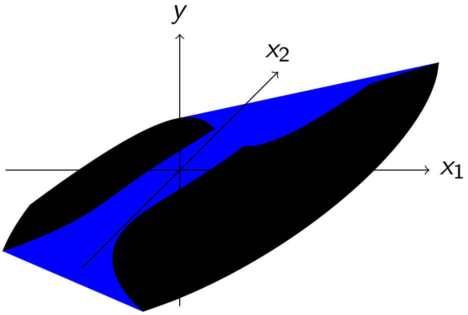


conv S

S

Système d'inégalités polynomiales

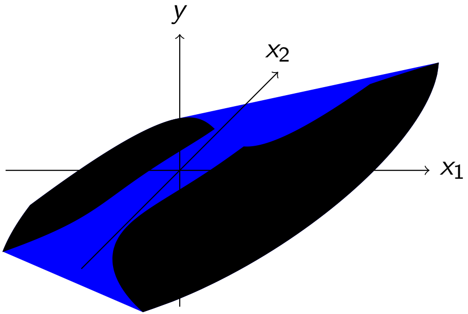
$$
\begin{array}{llllllllllllllllll}
A & & & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

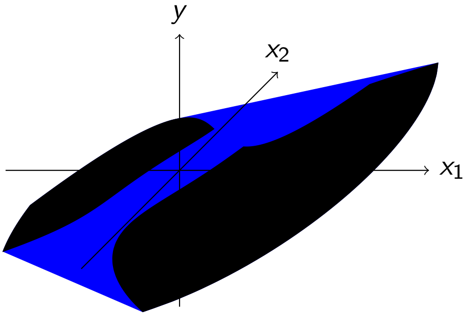
$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

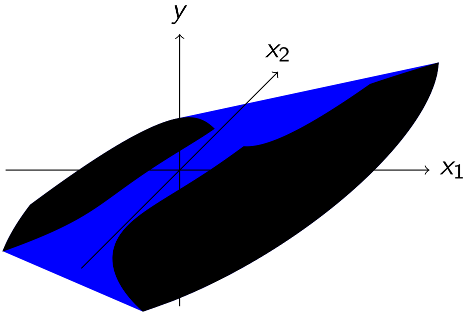
$$
\begin{array}{ll}
A & y_1 - x_1 - 2x_2 + 1 \geq 0 \\
B & -x_2^4 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \frac{1}{3} \geq 0 \\
C & -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 \geq 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

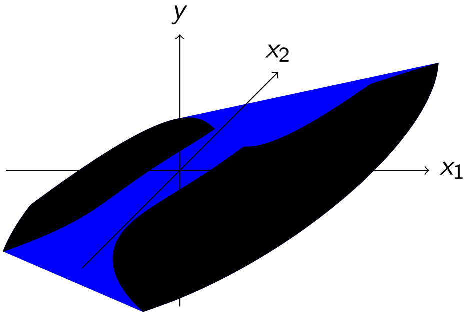
$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

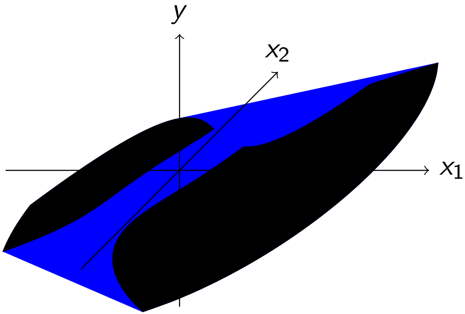
$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

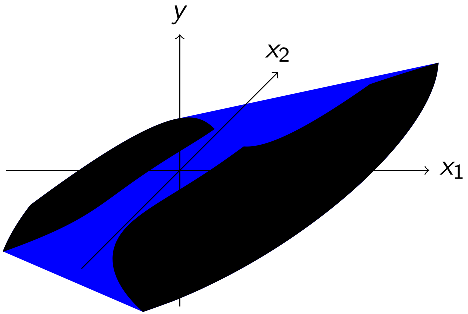
$$
\begin{array}{lrrrrrrrrr}
A & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

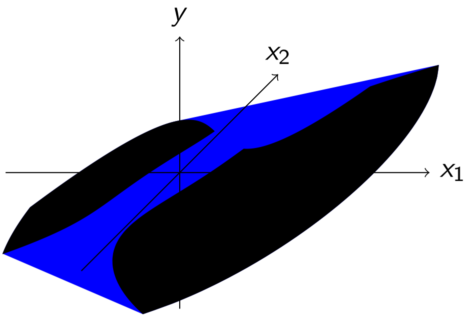
$$\begin{array}{lrrrrrrrr}
A & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

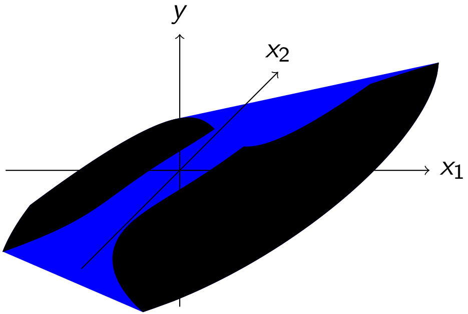
$$
\begin{array}{lrrrrrrrl}
A & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + \; 1 \geq 0 \\
B & -\; y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - \; \tfrac{1}{3} \geq 0 \\
C & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + \; 4 \geq 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

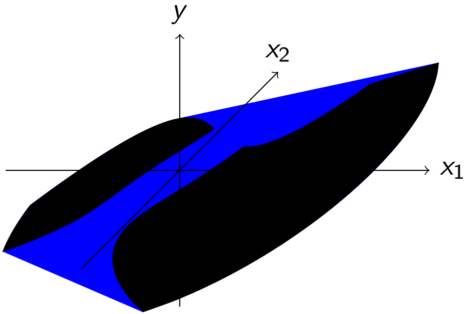
$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Système d'inégalités linéaires

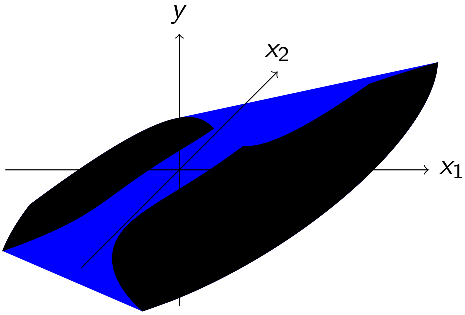
$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités linéaires

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
{\color{blue}A} & & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
{\color{red}B} & - & x_2^4 & + & & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
{\color{olive}C} & & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

redondantes :

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

redondantes :

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
AB & - & x_1^3x_2^4 & + & \ldots & + & x_2^2 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{redondantes :} \\
AB & - & x_1^3x_2^4 & + & \ldots & + & x_2^2 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{redondantes :} & & & & & & & & & & & & & \\
AB & - & x_1^3x_2^4 & + & & \dots & + & x_2^2 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{redondantes :} & & & & & & & & & & & & \\
AB & - & x_1^3x_2^4 & + & \ldots & + & x_2^2 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{redondantes :} \\
AB & - & x_1^3x_2^4 & + & \ldots & + & x_2^2 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

redondantes :

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
AB & - & x_1^3x_2^4 & + & \dots & + & x_2^2 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondantes :} \\
AB & - & x_1^3x_2^4 & + & \dots & + & x_2^2 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 & & \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 & & \\
\text{irredondantes :} \\
AB & - & x_1^3x_2^4 & + & \dots & + & x_2^2 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondantes :} \\
AB & - & x_1^3x_2^4 & + & \dots & + & x_2^2 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondantes :} \\
AB & - & x_1^3x_2^4 & + & \dots & + & x_2^2 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\end{array}
$$

irredondantes :

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
AB & - & x_1^3x_2^4 & + & \dots & + & x_2^2 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & & \geq & 0
\end{array}
$$

irredondantes :

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
AB & - & x_1^3x_2^4 & + & \dots & + & x_2^2 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & & \geq & 0 \\
\text{irredondantes :} & & & & & & & & & & & & & \\
AB & - & x_1^3x_2^4 & + & \ldots & + & x_2^2 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4x_2^2 & & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondantes :} \\
AB & - & x_1^3x_2^4 & + & \dots & + & x_2^2 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

irredondantes :

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
AB & - & x_1^3x_2^4 & + & \dots & + & y_5 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondantes :} \\
AB & - & x_1^3x_2^4 & + & \ldots & + & y_5 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & & \geq & 0
\end{array}
$$

irredondantes :

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
AB & - & y_6 & + & \dots & + & y_5 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\multicolumn{14}{l}{\text{irredondantes :}} \\
AB & - & y_6 & + & \dots & & + & y_5 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondantes :} \\
AB & - & y_6 & + & \dots & + & y_5 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondantes :} \\
AB & - & y_6 & + & \dots & + & y_5 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\multicolumn{2}{l}{\text{irredondantes :}} \\
AB & - & y_6 & + & \dots & + & y_5 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & y_{13} & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

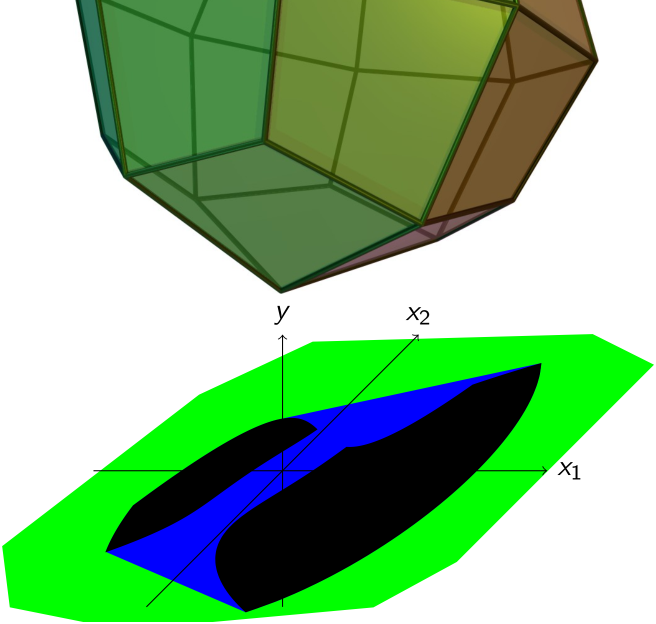
Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & & \geq & 0 \\
\text{irredondantes :} & & & & & & & & & & & & & \\
AB & - & y_6 & + & \dots & + & y_5 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & & \geq & 0 \\
ABC & - & y_{13} & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrl}
A & & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & & & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & & & \geq & 0 \\
\text{irredondantes :} \\
AB & - & y_6 & + & \ldots & + & y_5 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3} & & & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & & & \geq & 0 \\
ABC & - & y_{13} & + & \ldots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & & & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & & & \geq & 0 \\
D^2C & - & y_{18} & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & & & \geq & 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 & \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$(a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2)^2 \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$(a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2)^2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$(a+bx_1+cx_2+dx_1^2+ex_1x_2+fx_2^2)\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrl}
A & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$(a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2)^2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$(a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2)^2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\ x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\ x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\ x_1^2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\ x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\ x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrl}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\ x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\ x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\ x_1^2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\ x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\ x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \dots$) :

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\ x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\ x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\ x_1^2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\ x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\ x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrl}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & y_3 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & y_3 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & x_2^2 \\ x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 \\ x_2 & y_4 & x_2^2 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \\ y_3 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\ y_4 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\ x_2^2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & x_2^2 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 \\
x_2 & y_4 & x_2^2 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
x_2^2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 \\
x_2 & y_4 & y_5 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\ x_2 & y_4 & y_5 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\ y_3 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\ y_4 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\ y_5 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & x_1x_2^2 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & y_6 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
y_4 & y_6 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
y_5 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & x_1x_2^2 \\ x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\ y_3 & y_1 & y_6 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\ y_4 & y_6 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\ y_5 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrl}
A & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & y_6 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & y_6 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \dots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\ x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & x_2^3 \\ y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\ y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\ y_5 & y_7 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\ x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & x_2^3 \\ y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\ y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\ y_5 & y_7 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\ x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\ y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\ y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\ y_5 & y_7 & y_9 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{llcccccccccccc}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{llcrcrcrcrcrcl}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{11} \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & y_{11} & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \dots$) :

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{11} \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & y_{11} & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{llcrcrcrcrcrcl}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{11} \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \\
y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & y_{12} & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{11} \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \\
y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & y_{12} & y_2
\end{pmatrix} \succeq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrl}
A & & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4)(a + bx_1 + cx_2)\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a \\ b \\ c\end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{llllllllllll}
A & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \dots$) :

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} (-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} (-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\
-x_1^3 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \ldots & \ldots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{llcccccccccccc}
A & & & & x_1^3 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\
-x_1^3 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \ldots & \ldots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\
-y_1 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \ldots & \ldots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\ -y_1 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\ -x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\
-y_1 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \ldots & \ldots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \dots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\ -y_1 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \dots & \dots \\ -x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - x_2^2 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\
-y_1 - x_1x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \ldots & \ldots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - x_2^2 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\
-y_1 - x_1x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \ldots & \ldots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_3 - x_2^2 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\ -y_1 - x_1 x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\ -x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{llcrcrcrcrcrcr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - x_2^2 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\
-y_1 - x_1 x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\
-x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \ldots & \ldots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\
-y_1 - x_1 x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\
-x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \ldots & \ldots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\ -y_1 - x_1 x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\ -x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \dots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\ -y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\ -x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\
-y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\
-x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \ldots & \ldots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\ -y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\ -y_7 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\ -y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\ -y_7 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\
-y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\
-y_7 - y_8 + y_4 + 4x_2 & \ldots & \ldots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

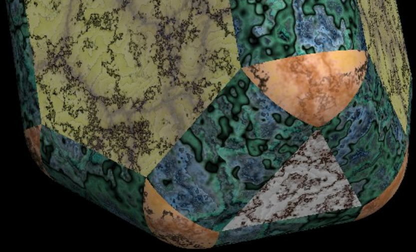
Système d'inégalités polynomiales

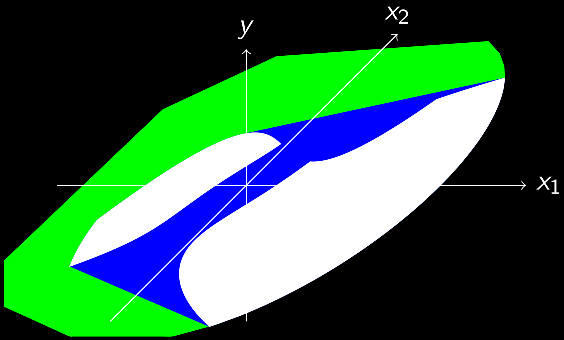
Tentative de linéarisation après avoir ajouté des familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & & & y_1 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$) :

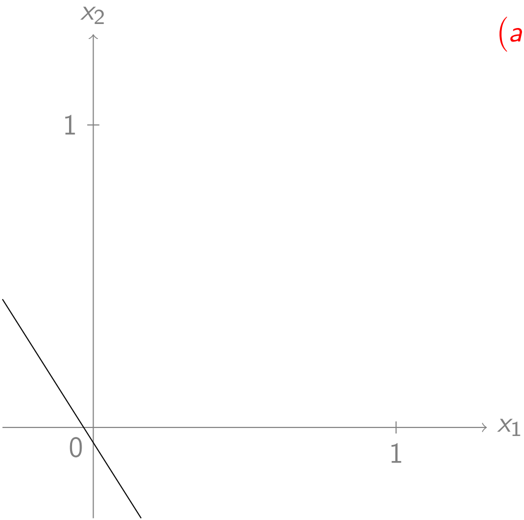
$$
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \ldots & \ldots \\
-y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \ldots & \ldots \\
-y_7 - y_8 + y_4 + 4x_2 & \ldots & \ldots
\end{pmatrix} \succeq 0
$$





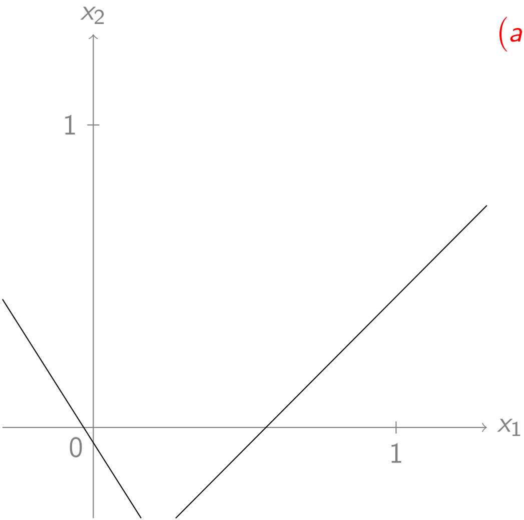
conv S

Inégalités matricielles linéaires



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

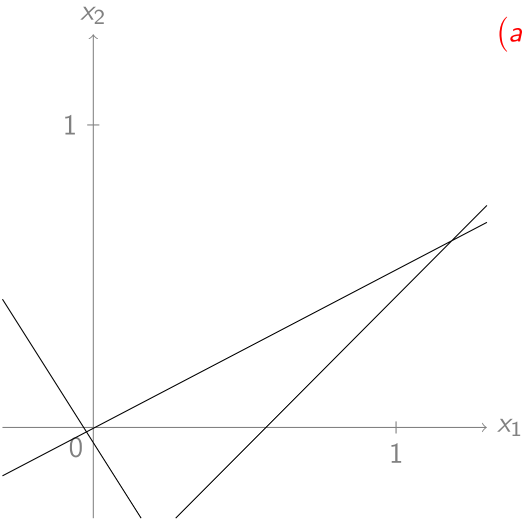
a, b, c indépendants et suivant une loi normale



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c indépendants et suivant une loi normale

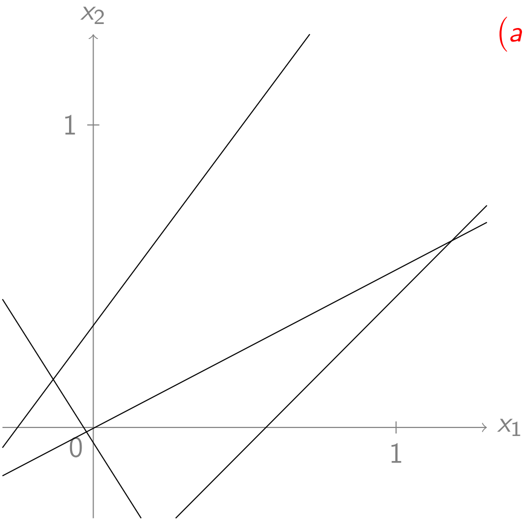
Inégalités matricielles linéaires



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c indépendants et suivant une loi normale

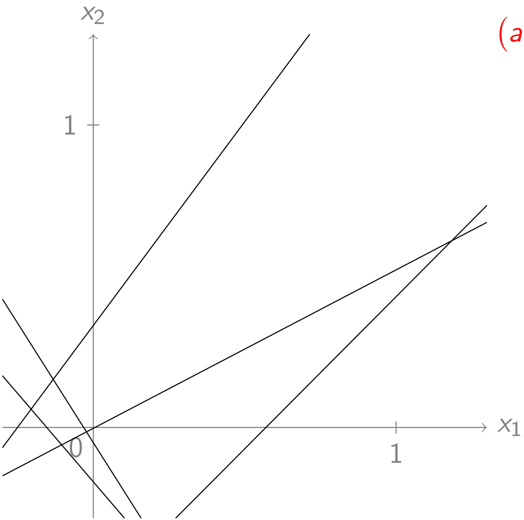
Inégalités matricielles linéaires



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

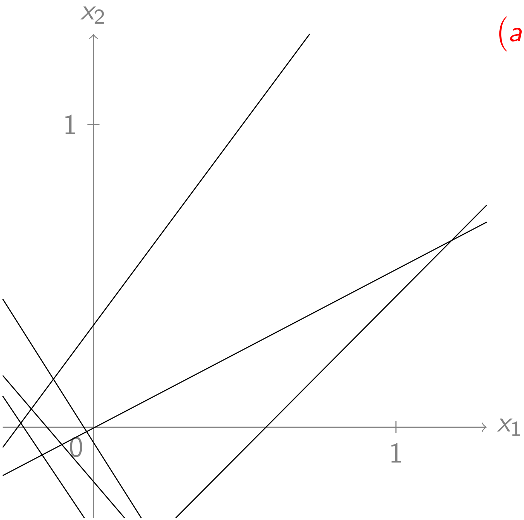
a, b, c indépendants et suivant une loi normale

Inégalités matricielles linéaires



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

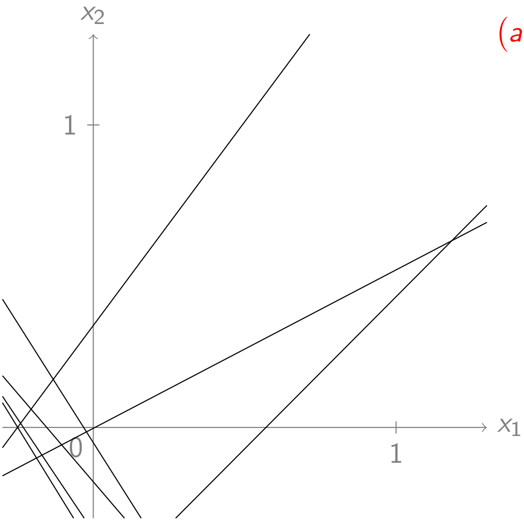
a, b, c indépendants et suivant une loi normale



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

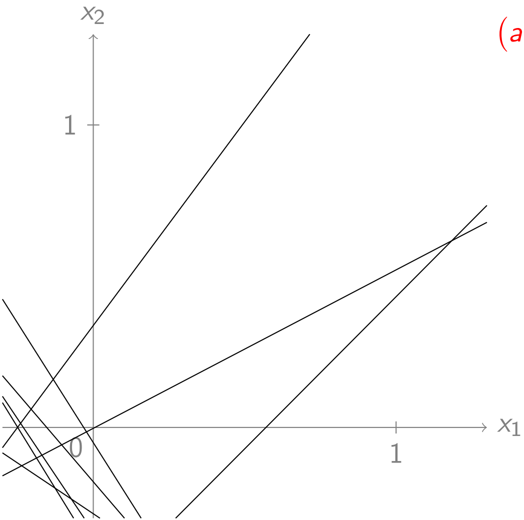
a, b, c indépendants et suivant une loi normale

Inégalités matricielles linéaires



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

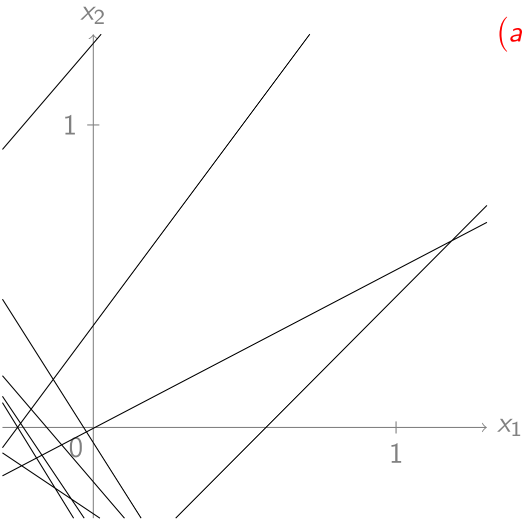
a, b, c indépendants et suivant une loi normale



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

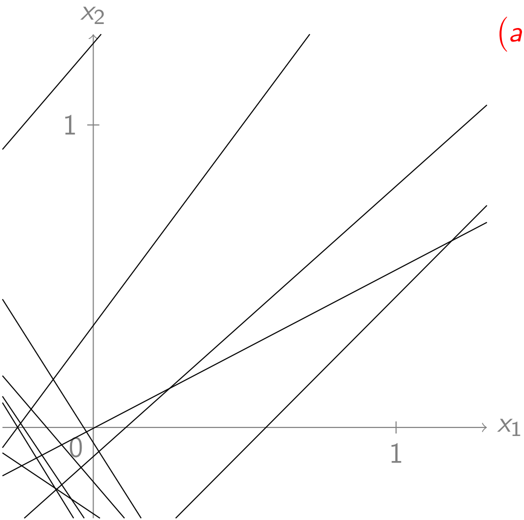
a, b, c indépendants et suivant une loi normale

Inégalités matricielles linéaires



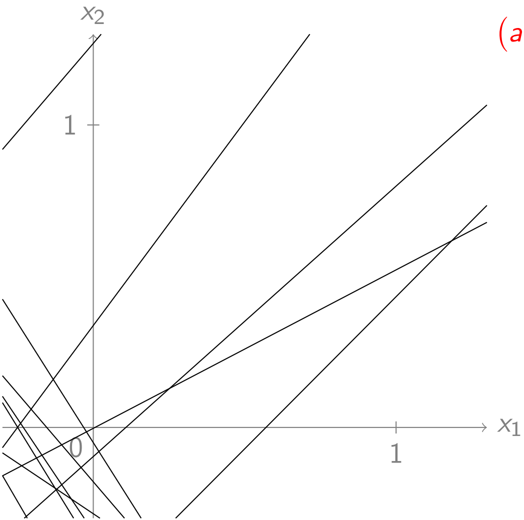
$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c indépendants et suivant une loi normale



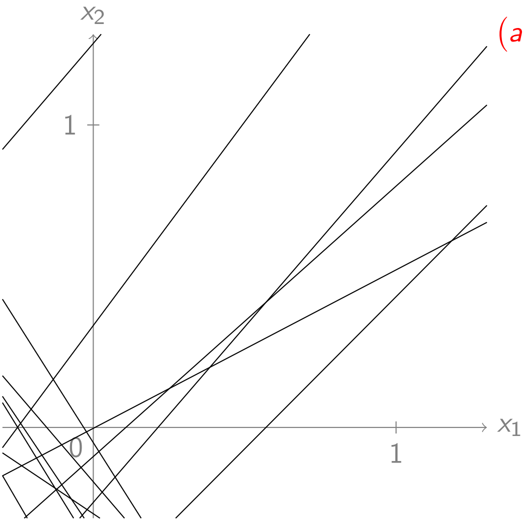
$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c indépendants et suivant une loi normale



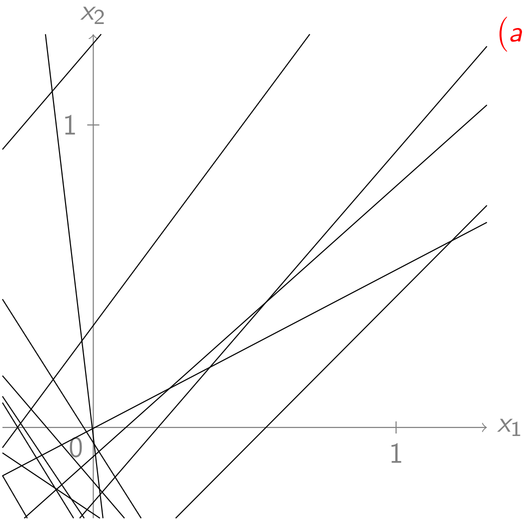
$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c indépendants et suivant une loi normale



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

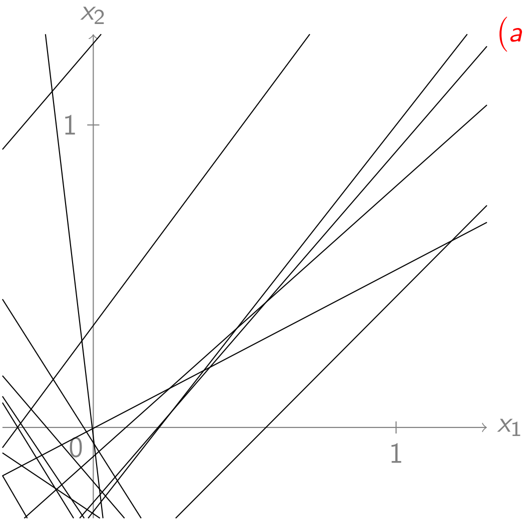
a, b, c indépendants et suivant une loi normale



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

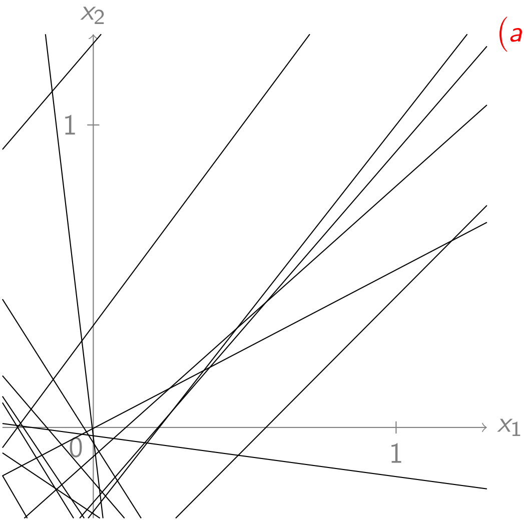
a, b, c indépendants et suivant une loi normale

Inégalités matricielles linéaires



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

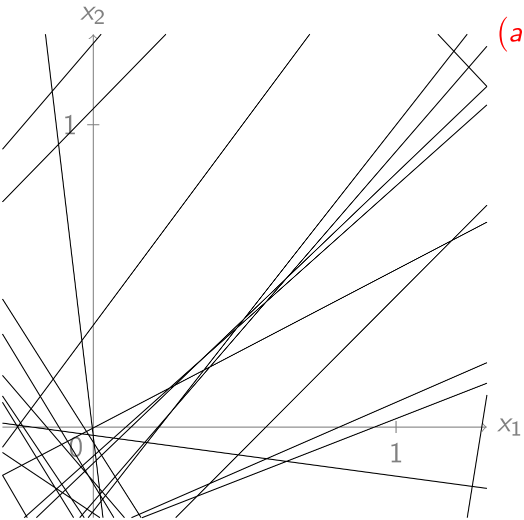
a, b, c indépendants et suivant une loi normale



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c indépendants et suivant une loi normale

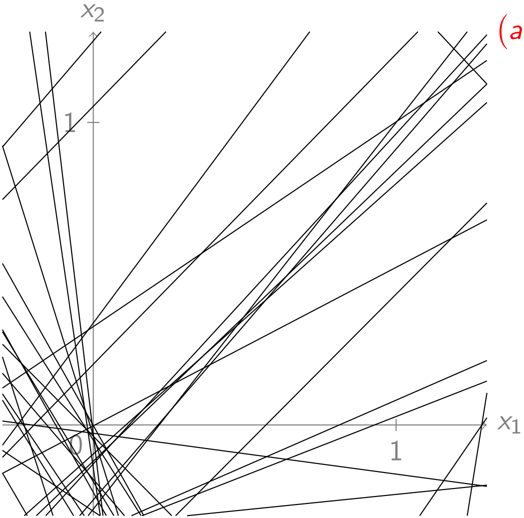
Inégalités matricielles linéaires



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c indépendants et suivant une loi normale

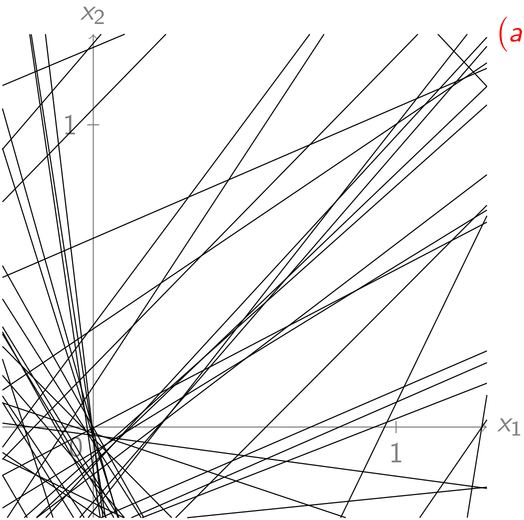
Inégalités matricielles linéaires



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

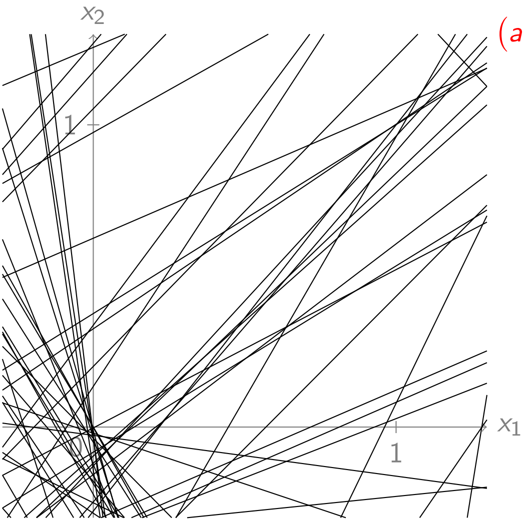
a, b, c indépendants et suivant une loi normale

Inégalités matricielles linéaires



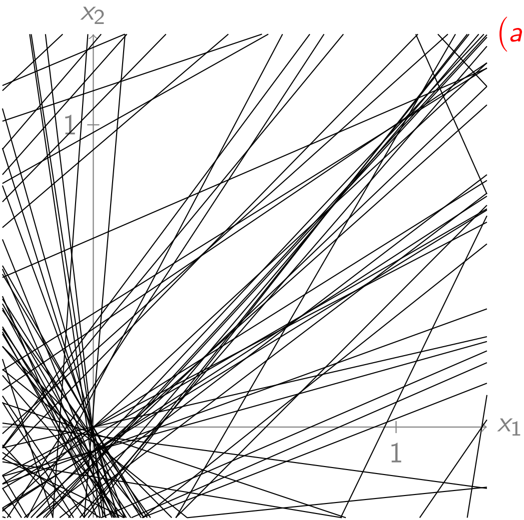
$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c indépendants et suivant une loi normale



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

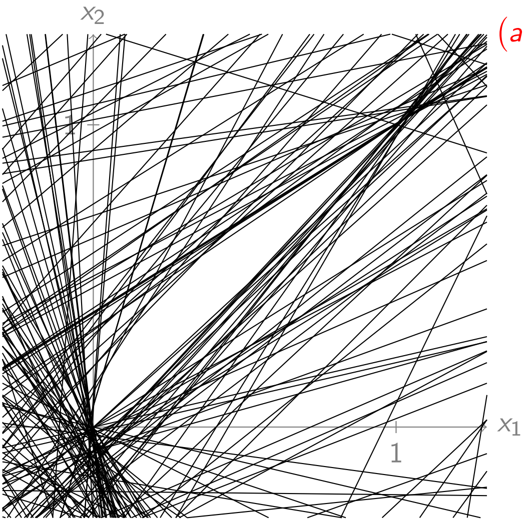
a, b, c indépendants et suivant une loi normale



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c indépendants et suivant une loi normale

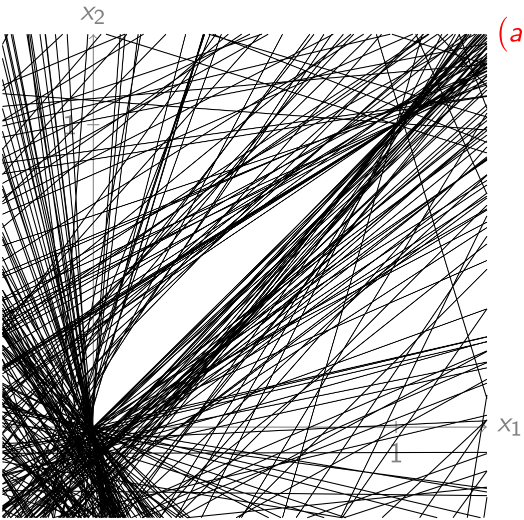
Inégalités matricielles linéaires



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c indépendants et suivant une loi normale

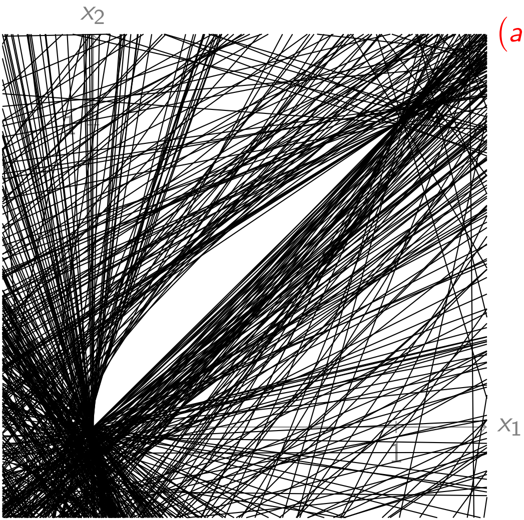
Inégalités matricielles linéaires



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c indépendants et suivant une loi normale

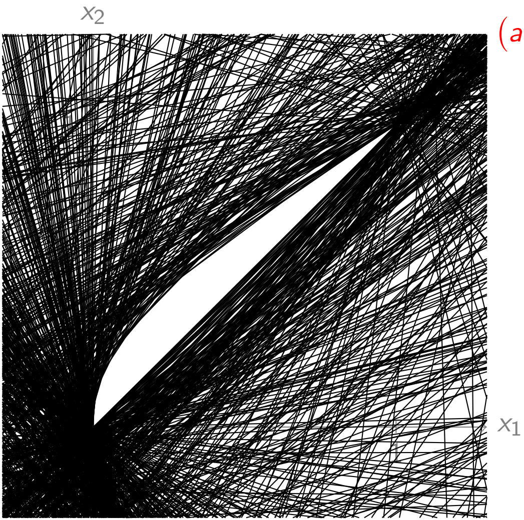
Inégalités matricielles linéaires



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c indépendants et suivant une loi normale

Inégalités matricielles linéaires



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c indépendants et suivant une loi normale

Inégalités matricielles linéaires

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c indépendants et suivant une loi normale

Inégalités matricielles linéaires

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c indépendants et suivant une loi normale

Relaxation des moments

Relaxation de Lasserre (Jean Lasserre)

Maintenant on formalise le processus de linéarisation qu'on avait décrit de façon informelle.

Relaxation des moments

Relaxation de Lasserre (Jean Lasserre)

Maintenant on formalise le processus de linéarisation qu'on avait décrit de façon informelle.

Comme ils coûtent cher pour le calcul, on essaye d'éviter des produits comme $A \cdot B$ dans les contraintes ajouté redondamment avant la linéarisation.

Relaxation des moments

Relaxation de Lasserre (Jean Lasserre)

Maintenant on formalise le processus de linéarisation qu'on avait décrit de façon informelle.

Comme ils coûtent cher pour le calcul, on essaye d'éviter des produits comme $A \cdot B$ dans les contraintes ajouté redondamment avant la linéarisation.

Au lieu de produits, on permet de sommes alors qu'ils n'ont aucun effet (comme la linéarisation commute avec les sommes). C'est parce qu'ils s'avèrent pratiques pour les fins théoriques (ainsi les contraintes redondantes formeront un cône convexe).

Relaxation des moments

Relaxation de Lasserre (Jean Lasserre)

Maintenant on formalise le processus de linéarisation qu'on avait décrit de façon informelle.

Comme ils coûtent cher pour le calcul, on essaye d'éviter des produits comme $A \cdot B$ dans les contraintes ajouté redondamment avant la linéarisation.

Au lieu de produits, on permet de sommes alors qu'ils n'ont aucun effet (comme la linéarisation commute avec les sommes). C'est parce qu'ils s'avèrent pratiques pour les fins théoriques (ainsi les contraintes redondantes formeront un cône convexe).

Les contraintes redondantes ajoutées formeront au fait un module quadratique tronqué :

Module quadratique

Définition : Soit A un anneau commutatif (ex. : $A = \mathbb{R}[\underline{X}]$) et $T \subseteq A$.
Alors on appelle T un module quadratique dans A si

Module quadratique

Définition : Soit A un anneau commutatif (ex. : $A = \mathbb{R}[\underline{X}]$) et $T \subseteq A$.
Alors on appelle T un module quadratique dans A si

- $1 \in T$,
- $p + q \in T$ pour tout $p, q \in T$ et
- $h^2 p \in T$ pour tout $h \in A$ et $p \in T$.

Module quadratique

Définition : Soit A un anneau commutatif (ex. : $A = \mathbb{R}[\underline{X}]$) et $T \subseteq A$. Alors on appelle T un module quadratique dans A si

- $1 \in T$,
- $p + q \in T$ pour tout $p, q \in T$ et
- $h^2 p \in T$ pour tout $h \in A$ et $p \in T$.

Notons que dans $\mathbb{R}[\underline{X}]$ tout module quadratique est un cône convexe. Le plus petit module quadratique est l'ensemble

$$\sum A^2 := \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} h_i^2 \mid \ell \in \mathbb{N}_0, h_i \in A \right\}$$

des sommes de carrés.

Module quadratique

Définition : Soit A un anneau commutatif (ex. : $A = \mathbb{R}[\underline{X}]$) et $T \subseteq A$. Alors on appelle T un module quadratique dans A si

- $1 \in T$,
- $p + q \in T$ pour tout $p, q \in T$ et
- $h^2 p \in T$ pour tout $h \in A$ et $p \in T$.

Notons que dans $\mathbb{R}[\underline{X}]$ tout module quadratique est un cône convexe. Le plus petit module quadratique est l'ensemble

$$\sum A^2 := \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} h_i^2 \mid \ell \in \mathbb{N}_0, h_i \in A \right\}$$

des sommes de carrés. Plus généralement, le module quadratique engendré par $p_1, \ldots, p_m \in A$ est

$$T(p_1, \ldots, p_m) := \sum A^2 + \sum A^2 p_1 + \cdots + \sum A^2 p_m$$

où $\sum A^2 p := \{sp \mid s \in \sum A^2\}$ pour $p \in A$.

Module quadratique tronqué

Définition : Soit $m \in \mathbb{N}_0$, $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ et $k \in \mathbb{N}_0$. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[\underline{X}]_k$ des polynômes de degré k au plus, nous dénotons le cône convexe

$$(\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2) + (\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p_1) + \cdots + (\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p_m)$$

par $T_k(p_1, \ldots, p_m)$ et nous l'appelons le module quadratique tronqué en degré k associé à $p_1, \ldots, p_m$.

Module quadratique tronqué

Définition : Soit $m \in \mathbb{N}_0$, $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ et $k \in \mathbb{N}_0$. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[\underline{X}]_k$ des polynômes de degré k au plus, nous dénotons le cône convexe

$$(\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2) + (\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p_1) + \cdots + (\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p_m)$$

par $T_k(p_1, \ldots, p_m)$ et nous l'appelons le module quadratique tronqué en degré k associé à $p_1, \ldots, p_m$.

C'est facile à montrer que
$\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p = \{\sum_{i=1}^{\ell} h_i^2 p \mid h_i \in \mathbb{R}[\underline{X}], 2\deg(h_i) \leq k - \deg(p)\}$
pour $k \in \mathbb{N}_0$ et $p \in \mathbb{R}[\underline{X}] \setminus \{0\}$.

Module quadratique tronqué

Définition : Soit $m \in \mathbb{N}_0$, $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ et $k \in \mathbb{N}_0$. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[\underline{X}]_k$ des polynômes de degré k au plus, nous dénotons le cône convexe

$$(\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2) + (\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p_1) + \dots + (\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p_m)$$

par $T_k(p_1, \dots, p_m)$ et nous l'appelons le module quadratique tronqué en degré k associé à $p_1, \dots, p_m$.

C'est facile à montrer que
$\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p = \{\sum_{i=1}^{\ell} h_i^2 p \mid h_i \in \mathbb{R}[\underline{X}], 2\deg(h_i) \leq k - \deg(p)\}$
pour $k \in \mathbb{N}_0$ et $p \in \mathbb{R}[\underline{X}] \setminus \{0\}$.

L'inclusion $T_k(p_1, \dots, p_m) \subseteq \mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap T(p_1, \dots, p_m)$ est en général loin d'être une égalité.

Module quadratique tronqué

Définition : Soit $m \in \mathbb{N}_0$, $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ et $k \in \mathbb{N}_0$. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[\underline{X}]_k$ des polynômes de degré k au plus, nous dénotons le cône convexe

$$(\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2) + (\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p_1) + \dots + (\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p_m)$$

par $T_k(p_1, \dots, p_m)$ et nous l'appelons le module quadratique tronqué en degré k associé à $p_1, \dots, p_m$.

C'est facile à montrer que
$\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p = \{\sum_{i=1}^{\ell} h_i^2 p \mid h_i \in \mathbb{R}[\underline{X}], 2\deg(h_i) \leq k - \deg(p)\}$
pour $k \in \mathbb{N}_0$ et $p \in \mathbb{R}[\underline{X}] \setminus \{0\}$.

L'inclusion $T_k(p_1, \dots, p_m) \subseteq \mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap T(p_1, \dots, p_m)$ est en général loin d'être une égalité.

Plus grand le degré de relaxation k est choisi, plus grand est le nombre de contraintes redondantes qu'on ajoute avant la linéarisation.

Module quadratique tronqué

Définition : Soit $m \in \mathbb{N}_0$, $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ et $k \in \mathbb{N}_0$. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[\underline{X}]_k$ des polynômes de degré k au plus, nous dénotons le cône convexe

$$(\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2) + (\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p_1) + \dots + (\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p_m)$$

par $T_k(p_1, \dots, p_m)$ et nous l'appelons le module quadratique tronqué en degré k associé à $p_1, \dots, p_m$.

C'est facile à montrer que
$\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p = \{\sum_{i=1}^{\ell} h_i^2 p \mid h_i \in \mathbb{R}[\underline{X}], 2\deg(h_i) \leq k - \deg(p)\}$
pour $k \in \mathbb{N}_0$ et $p \in \mathbb{R}[\underline{X}] \setminus \{0\}$.

L'inclusion $T_k(p_1, \dots, p_m) \subseteq \mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap T(p_1, \dots, p_m)$ est en général loin d'être une égalité.

Plus grand le degré de relaxation k est choisi, plus grand est le nombre de contraintes redondantes qu'on ajoute avant la linéarisation. Un nombre plus élévé de contraintes redondantes améliore la linéarisation mais agrandit en même temps le PSD.

Relaxation des moments

Considérons un POP

$$(P) \quad \text{minimiser } f(x) \text{ parmi les } x \in \mathbb{R}^n \text{ s.c. } p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0$$

donné par $m, n \in \mathbb{N}_0$ et $f, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$.

Relaxation des moments

Considérons un POP

$$(P) \quad \text{minimiser } f(x) \text{ parmi les } x \in \mathbb{R}^n \text{ s.c. } p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0$$

donné par $m, n \in \mathbb{N}_0$ et $f, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$.

Soit $k \in \mathbb{N}_0$ un degré de relaxation tel que $f, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

Relaxation des moments

Considérons un POP

$$(P) \quad \text{minimiser } f(x) \text{ parmi les } x \in \mathbb{R}^n \text{ s.c. } p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0$$

donné par $m, n \in \mathbb{N}_0$ et $f, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$.

Soit $k \in \mathbb{N}_0$ un degré de relaxation tel que $f, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

La relaxation des moments de degré k (ou relaxation de Lasserre) de (P) est le PSD donné par

$$\begin{array}{llrl} (P_k) & \text{minimiser} \quad L(f) & \text{parmi les} & L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^* \\ & & \text{sous contraintes} & L(T_k(p_1, \ldots, p_m)) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ et} \\ & & & L(1) = 1. \end{array}$$

Relaxation des moments

Considérons un POP

$$(P) \quad \text{minimiser } f(x) \text{ parmi les } x \in \mathbb{R}^n \text{ s.c. } p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0$$

donné par $m, n \in \mathbb{N}_0$ et $f, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$.

Soit $k \in \mathbb{N}_0$ un degré de relaxation tel que $f, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

La relaxation des moments de degré k (ou relaxation de Lasserre) de (P) est le PSD donné par

$$\begin{array}{llrl} (P_k) & \text{minimiser} \quad L(f) & \text{parmi les} & L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^* \\ & & \text{sous contraintes} & L(T_k(p_1, \ldots, p_m)) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ et} \\ & & & L(1) = 1. \end{array}$$

Ici $\mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ est l'espace dual de $\mathbb{R}[\underline{X}]_k$ et (P_k) s'écrit comme un PDS en implémentant les $L(\underline{X}^\alpha)$ ($\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq k$) par des nouvelles variables y_i comme avant.

Propriétés triviales de la relaxation des moments

Proposition : Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$, $f, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$ et soit (P_k) la relaxation des moments de degré k du POP

$$(P) \qquad \text{minimiser } f(x) \text{ parmi les } x \in \mathbb{R}^n \text{ sous contraintes } x \in S$$

où $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0\}$.

Propriétés triviales de la relaxation des moments

Proposition : Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$, $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$ et soit (P_k) la relaxation des moments de degré k du POP

$$(P) \qquad \text{minimiser } f(x) \text{ parmi les } x \in \mathbb{R}^n \text{ sous contraintes } x \in S$$

où $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$. Alors

(a) $P^* \geq \dots \geq P^*_{k+4} \geq P^*_{k+3} \geq P^*_{k+2} \geq P^*_{k+1} \geq P^*_k$

Propriétés triviales de la relaxation des moments

Proposition : Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$, $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$ et soit (P_k) la relaxation des moments de degré k du POP

$$(P) \qquad \text{minimiser } f(x) \text{ parmi les } x \in \mathbb{R}^n \text{ sous contraintes } x \in S$$

où $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$. Alors

(a) $P^* \geq \dots \geq P^*_{k+4} \geq P^*_{k+3} \geq P^*_{k+2} \geq P^*_{k+1} \geq P^*_k$

(b) Si L est l'intégration par rapport à une mesure sur S, alors L est un point admissible de (P_k) avec $L(f) \geq P^*$.

Propriétés triviales de la relaxation des moments

Proposition : Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$, $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$ et soit (P_k) la relaxation des moments de degré k du POP

$$(P) \qquad \text{minimiser } f(x) \text{ parmi les } x \in \mathbb{R}^n \text{ sous contraintes } x \in S$$

où $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$. Alors

(a) $P^* \geq \dots \geq P^*_{k+4} \geq P^*_{k+3} \geq P^*_{k+2} \geq P^*_{k+1} \geq P^*_k$

(b) Si L est l'intégration par rapport à une mesure sur S, alors L est un point admissible de (P_k) avec $L(f) \geq P^*$.

(c) Si (P_k) a une solution (optimale) L^* dont la restriction à $\mathbb{R}[\underline{X}]_\ell$ est l'intégration par rapport à une mesure μ sur S pour un $\ell \in \{1, \dots, k\}$ avec $f \in \mathbb{R}[\underline{X}]_\ell$, alors on a de l'égalité partout dans (a) et tout élément du support de μ est une solution de (P).

Propriétés triviales de la relaxation des moments

Proposition : Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$, $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$ et soit (P_k) la relaxation des moments de degré k du POP

$$(P) \qquad \text{minimiser } f(x) \text{ parmi les } x \in \mathbb{R}^n \text{ sous contraintes } x \in S$$

où $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$. Alors

(a) $P^* \geq \dots \geq P^*_{k+4} \geq P^*_{k+3} \geq P^*_{k+2} \geq P^*_{k+1} \geq P^*_k$

(b) Si L est l'intégration par rapport à une mesure sur S, alors L est un point admissible de (P_k) avec $L(f) \geq P^*$.

(c) Si (P_k) a une solution (optimale) L^* dont la restriction à $\mathbb{R}[\underline{X}]_\ell$ est l'intégration par rapport à une mesure μ sur S pour un $\ell \in \{1, \dots, k\}$ avec $f \in \mathbb{R}[\underline{X}]_\ell$, alors on a de l'égalité partout dans (a) et tout élément du support de μ est une solution de (P).

(d) Dans la situation de (c), si (P) n'admet qu'une seule solution x^*, alors $x^* = (L^*(X_1), \dots, L^*(X_n))$ et en plus $L^*(p) = p(x^*)$ pour tout $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]^*_\ell$.

Problème des moments tronqué

Stratégie pour résoudre un problème d'optimisation polynomiale (P) :

(1) Choisir un degré de relaxation k plutôt petit.

Problème des moments tronqué

Stratégie pour résoudre un problème d'optimisation polynomiale (P) :

(1) Choisir un degré de relaxation k plutôt petit.

(2) Resoudre la relaxation des moments (P_k) à l'aide d'un solveur PSD. S'il prend trop longtemps, assister à un autre exposé.

Problème des moments tronqué

Stratégie pour résoudre un problème d'optimisation polynomiale (P) :

(1) Choisir un degré de relaxation k plutôt petit.

(2) Resoudre la relaxation des moments (P_k) à l'aide d'un solveur PSD. S'il prend trop longtemps, assister à un autre exposé.

(3) Espérer d'obtenir une solution L^* de (P_k) dont la restriction à $\mathbb{R}[\underline{X}]_\ell$ est l'intégration par rapport à une mesure μ sur S pour un $\ell \in \{1, \dots, k\}$ avec $f \in \mathbb{R}[\underline{X}]_\ell$. Autrement augmenter k et recommencer.

Problème des moments tronqué

Stratégie pour résoudre un problème d'optimisation polynomiale (P) :

(1) Choisir un degré de relaxation k plutôt petit.

(2) Resoudre la relaxation des moments (P_k) à l'aide d'un solveur PSD. S'il prend trop longtemps, assister à un autre exposé.

(3) Espérer d'obtenir une solution L^* de (P_k) dont la restriction à $\mathbb{R}[\underline{X}]_\ell$ est l'intégration par rapport à une mesure μ sur S pour un $\ell \in \{1, \dots, k\}$ avec $f \in \mathbb{R}[\underline{X}]_\ell$. Autrement augmenter k et recommencer.

(4) Determiner le support d'un tel μ et vérifier qu'il soit contenu dans S. Autrement augmenter k et recommencer.

Problème des moments tronqué

Stratégie pour résoudre un problème d'optimisation polynomiale (P) :

(1) Choisir un degré de relaxation k plutôt petit.

(2) Resoudre la relaxation des moments (P_k) à l'aide d'un solveur PSD. S'il prend trop longtemps, assister à un autre exposé.

(3) Espérer d'obtenir une solution L^* de (P_k) dont la restriction à $\mathbb{R}[\underline{X}]_\ell$ est l'intégration par rapport à une mesure μ sur S pour un $\ell \in \{1, \dots, k\}$ avec $f \in \mathbb{R}[\underline{X}]_\ell$. Autrement augmenter k et recommencer.

(4) Determiner le support d'un tel μ et vérifier qu'il soit contenu dans S. Autrement augmenter k et recommencer.

(5) Les valeurs optimales de (P) et (P_k) coïncident et tout élément du support de μ est une solution optimale x^* de (P).

Problème des moments tronqué

Stratégie pour résoudre un problème d'optimisation polynomiale (P) :

(1) Choisir un degré de relaxation k plutôt petit.

(2) Resoudre la relaxation des moments (P_k) à l'aide d'un solveur PSD. S'il prend trop longtemps, assister à un autre exposé.

(3) Espérer d'obtenir une solution L^* de (P_k) dont la restriction à $\mathbb{R}[\underline{X}]_\ell$ est l'intégration par rapport à une mesure μ sur S pour un $\ell \in \{1, \ldots, k\}$ avec $f \in \mathbb{R}[\underline{X}]_\ell$. Autrement augmenter k et recommencer.

(4) Determiner le support d'un tel μ et vérifier qu'il soit contenu dans S. Autrement augmenter k et recommencer.

(5) Les valeurs optimales de (P) et (P_k) coïncident et tout élément du support de μ est une solution optimale x^* de (P).

$\rightsquigarrow$ Problème des moments tronqué :

On a besoin de critères pour savoir si $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_\ell^*$ provient d'une mesure. Il faut aussi calculer le support d'une telle mesure.

Problème des moments tronqué

Stratégie pour résoudre un problème d'optimisation polynomiale (P) :

(1) Choisir un degré de relaxation k plutôt petit.

(2) Resoudre la relaxation des moments (P_k) à l'aide d'un solveur PSD. S'il prend trop longtemps, assister à un autre exposé.

(3) Espérer d'obtenir une solution L^* de (P_k) dont la restriction à $\mathbb{R}[\underline{X}]_\ell$ est l'intégration par rapport à une mesure μ sur S pour un $\ell \in \{1, \ldots, k\}$ avec $f \in \mathbb{R}[\underline{X}]_\ell$. Autrement augmenter k et recommencer.

(4) Determiner le support d'un tel μ et vérifier qu'il soit contenu dans S. Autrement augmenter k et recommencer.

(5) Les valeurs optimales de (P) et (P_k) coïncident et tout élément du support de μ est une solution optimale x^* de (P).

$\rightsquigarrow$ Problème des moments tronqué :

On a besoin de critères pour savoir si $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_\ell^*$ provient d'une mesure. Il faut aussi calculer le support d'une telle mesure.

Fait (existence de formules de quadrature, Bayer et Teichmann 2006) :

Si $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_\ell^*$ vient d'une mesure, il vient d'une mesure à support fini.

Problème des moments tronqué

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tels que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Problème des moments tronqué

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tels que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Tâche : Si possible, essayer de trouver une mesure à support fini μ telle que L (ou au moins $L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_\ell}$ pour un $\ell \leq 2d$ pas trop petit) est intégration par rapport à μ.

Problème des moments tronqué

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tels que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Tâche : Si possible, essayer de trouver une mesure à support fini μ telle que L (ou au moins $L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_\ell}$ pour un $\ell \leq 2d$ pas trop petit) est intégration par rapport à μ.

On aimerait trouver :

Problème des moments tronqué

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tels que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Tâche : Si possible, essayer de trouver une mesure à support fini μ telle que L (ou au moins $L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_\ell}$ pour un $\ell \leq 2d$ pas trop petit) est intégration par rapport à μ.

On aimerait trouver :
des nœuds $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^n$ et des poids $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tels que

$$L(p) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p(x_i) \qquad \text{pour tout } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_\ell.$$

Problème des moments tronqué

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tels que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Tâche : Si possible, essayer de trouver une mesure à support fini μ telle que L (ou au moins $L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_\ell}$ pour un $\ell \leq 2d$ pas trop petit) est intégration par rapport à μ.

On aimerait trouver :
$x_{11}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{r1}, \dots, x_{rn} \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tels que

$$L(p) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p(x_{i1}, \dots, x_{in}) \qquad \text{pour tout } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_\ell.$$

Problème des moments tronqué

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tels que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Tâche : Si possible, essayer de trouver une mesure à support fini μ telle que L (ou au moins $L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_\ell}$ pour un $\ell \leq 2d$ pas trop petit) est intégration par rapport à μ.

On aimerait trouver :
$x_{11}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{r1}, \dots, x_{rn} \in \mathbb{R}$ et $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ tels que

$$L(p) = \sum_{i=1}^{r} a_i^2 p(x_{i1}, \dots, x_{in}) \qquad \text{pour tout } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_\ell.$$

Problème des moments tronqué

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tels que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Tâche : Si possible, essayer de trouver une mesure à support fini μ telle que L (ou au moins $L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_\ell}$ pour un $\ell \leq 2d$ pas trop petit) est intégration par rapport à μ.

On aimerait trouver :
$x_{11}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{r1}, \dots, x_{rn} \in \mathbb{R}$ et $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ tels que

$$L(p) = \left\langle \begin{pmatrix} p(x_{11}, \dots, x_{1n}) & & \\ & \ddots & \\ & & p(x_{r1}, \dots, x_{rn}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} \right\rangle \text{ pour tout } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_\ell.$$

Problème des moments tronqué

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tels que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Tâche : Si possible, essayer de trouver une mesure à support fini μ telle que L (ou au moins $L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_\ell}$ pour un $\ell \leq 2d$ pas trop petit) est intégration par rapport à μ.

On aimerait trouver :
$x_{11}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{r1}, \dots, x_{rn} \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^r$ tels que

$$L(p) = \left\langle \begin{pmatrix} p(x_{11},\dots,x_{1n}) & & \\ & \ddots & \\ & & p(x_{r1},\dots,x_{rn}) \end{pmatrix} a, a \right\rangle \text{ pour tout } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_\ell.$$

Problème des moments tronqué

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tels que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Tâche : Si possible, essayer de trouver une mesure à support fini μ telle que L (ou au moins $L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_\ell}$ pour un $\ell \leq 2d$ pas trop petit) est intégration par rapport à μ.

On aimerait trouver :
$x_{11}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{r1}, \dots, x_{rn} \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^r$ tels que

$$L(p) = \left\langle p\left(\begin{pmatrix} x_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & x_{r1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{1n} & & \\ & \ddots & \\ & & x_{rn} \end{pmatrix}\right) a, a \right\rangle \text{ pour tout } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_\ell.$$

Problème des moments tronqué

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tels que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Tâche : Si possible, essayer de trouver une mesure à support fini μ telle que L (ou au moins $L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_\ell}$ pour un $\ell \leq 2d$ pas trop petit) est intégration par rapport à μ.

On aimerait trouver :
des matrices diagonales $D_1, \ldots, D_n \in \mathbb{R}^{r \times r}$ et $a \in \mathbb{R}^r$ tels que

$$L(p) = \langle p(D_1, \ldots, D_n)a, a \rangle \text{ pour tout } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_\ell.$$

Problème des moments tronqué

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tels que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Tâche : Si possible, essayer de trouver une mesure à support fini μ telle que L (ou au moins $L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_\ell}$ pour un $\ell \leq 2d$ pas trop petit) est intégration par rapport à μ.

On aimerait trouver :
des matrices commutantes $M_1, \dots, M_n \in S\mathbb{R}^{r \times r}$ et $a \in \mathbb{R}^r$ tels que

$$L(p) = \langle p(M_1, \dots, M_n)a, a \rangle \text{ pour tout } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_\ell.$$

Problème des moments tronqué

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tels que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Tâche : Si possible, essayer de trouver une mesure à support fini μ telle que L (ou au moins $L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_\ell}$ pour un $\ell \leq 2d$ pas trop petit) est intégration par rapport à μ.

On aimerait trouver :
un espace euclidien de dimension finie V, des endomorphismes commutants auto-adjoints $M_1, \ldots, M_n$ de V et $a \in V$ tels que

$$L(p) = \langle p(M_1, \ldots, M_n)(a), a \rangle \text{ pour tout } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_\ell.$$

Problème des moments tronqué

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tels que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Tâche : Si possible, essayer de trouver une mesure à support fini μ telle que L (ou au moins $L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_\ell}$ pour un $\ell \leq 2d$ pas trop petit) est intégration par rapport à μ.

On aimerait trouver :
un espace euclidien de dimension finie V, des endomorphismes commutants auto-adjoints $M_1, \ldots, M_n$ de V et $a \in V$ tels que

$$L(p) = \langle p(M_1, \ldots, M_n)(a), a \rangle \text{ pour tout } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_\ell.$$

Idée : Si on avait $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]^*$, $L(p^2) > 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}[\underline{X}] \setminus \{0\}$ et si on permettait à V d'avoir une dimension infinie, alors on pourrait prendre $V := \mathbb{R}[\underline{X}]$ muni du produit scalaire définie par $\langle p, q \rangle := L(pq)$ pour tout $p, q \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, $M_i \colon \mathbb{R}[\underline{X}] \to \mathbb{R}[\underline{X}],\ p \mapsto X_i p$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $a := 1 \in \mathbb{R}[\underline{X}]$.

Construction GNS tronquée

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tels que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Construction GNS tronquée

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tels que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Alors

$$U_L := \{p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d \mid \forall q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d : L(pq) = 0\}$$

est un sous-espace de $\mathbb{R}[\underline{X}]_d$ que nous appelons le noyau GNS de L.

Construction GNS tronquée

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tels que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Alors

$$U_L := \{p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d \mid \forall q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d : L(pq) = 0\}$$

est un sous-espace de $\mathbb{R}[\underline{X}]_d$ que nous appelons le noyau GNS de L.
Nous appelons l'espace vectoriel quotient $V_L := \mathbb{R}[\underline{X}]_d / U_L$ l'espace de la representation GNS de L.

Construction GNS tronquée

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tels que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Alors

$$U_L := \{p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d \mid \forall q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d : L(pq) = 0\}$$

est un sous-espace de $\mathbb{R}[\underline{X}]_d$ que nous appelons le noyau GNS de L. Nous appelons l'espace vectoriel quotient $V_L := \mathbb{R}[\underline{X}]_d / U_L$ l'espace de la representation GNS de L. C'est facile à montrer que

$$\langle \overline{p}, \overline{q} \rangle_L := L(pq) \qquad (p, q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d)$$

définit un produit scalaire sur V_L que nous appelons le produit scalaire GNS sur V_L.

Construction GNS tronquée

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tels que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Alors

$$U_L := \{p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d \mid \forall q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d : L(pq) = 0\}$$

est un sous-espace de $\mathbb{R}[\underline{X}]_d$ que nous appelons le noyau GNS de L. Nous appelons l'espace vectoriel quotient $V_L := \mathbb{R}[\underline{X}]_d / U_L$ l'espace de la representation GNS de L. C'est facile à montrer que

$$\langle \overline{p}, \overline{q} \rangle_L := L(pq) \qquad (p, q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d)$$

définit un produit scalaire sur V_L que nous appelons le produit scalaire GNS sur V_L. Ainsi V_L devient un espace euclidien de dimension finie.

Construction GNS tronquée

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tels que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Alors

$$U_L := \{p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d \mid \forall q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d : L(pq) = 0\}$$

est un sous-espace de $\mathbb{R}[\underline{X}]_d$ que nous appelons le noyau GNS de L. Nous appelons l'espace vectoriel quotient $V_L := \mathbb{R}[\underline{X}]_d / U_L$ l'espace de la representation GNS de L. C'est facile à montrer que

$$\langle \overline{p}, \overline{q} \rangle_L := L(pq) \qquad (p, q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d)$$

définit un produit scalaire sur V_L que nous appelons le produit scalaire GNS sur V_L. Ainsi V_L devient un espace euclidien de dimension finie. Nous appelons la projection orthogonale π_L de V_L sur le sous-espace $\{\overline{p} \mid p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}\}$ la troncature GNS de L.

Construction GNS tronquée

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tels que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Alors

$$U_L := \{p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d \mid \forall q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d : L(pq) = 0\}$$

est un sous-espace de $\mathbb{R}[\underline{X}]_d$ que nous appelons le noyau GNS de L.
Nous appelons l'espace vectoriel quotient $V_L := \mathbb{R}[\underline{X}]_d / U_L$ l'espace de la representation GNS de L. C'est facile à montrer que

$$\langle \overline{p}, \overline{q} \rangle_L := L(pq) \qquad (p, q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d)$$

définit un produit scalaire sur V_L que nous appelons le produit scalaire GNS sur V_L. Ainsi V_L devient un espace euclidien de dimension finie.
Nous appelons la projection orthogonale π_L de V_L sur le sous-espace $\{\overline{p} \mid p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}\}$ la troncature GNS de L.
Alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$M_{L,i} \colon \pi_L V_L \to \pi_L V_L,\ \overline{p} \mapsto \pi_L(\overline{X_i p}) \qquad (p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1})$$

est un endomorphisme auto-adjoint de $\pi_L V_L$ que nous appelons le i-ième opérateur de multiplication tronqué de L.

Construction GNS tronquée

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ avec $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Afin de montrer que

$$M_{L,i} \colon \pi_L V_L \to \pi_L V_L,\ \overline{p} \mapsto \pi_L(\overline{X_i p}) \qquad (p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1})$$

est bien défini,

Construction GNS tronquée

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ avec $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Afin de montrer que

$$M_{L,i} \colon \pi_L V_L \to \pi_L V_L,\ \overline{p} \mapsto \pi_L(\overline{X_i p}) \qquad (p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1})$$

est bien défini, notons que $\pi_L(\overline{X_i p}) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} \cap U_L$,

Construction GNS tronquée

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ avec $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Afin de montrer que

$$M_{L,i} \colon \pi_L V_L \to \pi_L V_L,\ \overline{p} \mapsto \pi_L(\overline{X_i p}) \qquad (p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1})$$

est bien défini, notons que $\pi_L(\overline{X_i p}) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} \cap U_L$, car si on choisit $q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}$ tel que $\overline{q} = \pi_L(\overline{X_i p})$, alors

Construction GNS tronquée

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ avec $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Afin de montrer que

$$M_{L,i} \colon \pi_L V_L \to \pi_L V_L,\ \overline{p} \mapsto \pi_L(\overline{X_i p}) \qquad (p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1})$$

est bien défini, notons que $\pi_L(\overline{X_i p}) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} \cap U_L$, car si on choisit $q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}$ tel que $\overline{q} = \pi_L(\overline{X_i p})$, alors

$$\begin{aligned}\langle \overline{q}, \overline{q} \rangle_L &= \langle \pi_L(\overline{X_i p}), \overline{q} \rangle_L = \langle \overline{X_i p}, \pi_L(\overline{q}) \rangle_L \\ &\overset{\overline{q} \in \pi_L V_L}{=} \langle \overline{X_i p}, \overline{q} \rangle_L = L(X_i p q) = L(p(X_i q)) = \langle \overline{p}, \overline{X_i q} \rangle_L \overset{p \in U_L}{=} 0.\end{aligned}$$

Construction GNS tronquée

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ avec $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Afin de montrer que

$$M_{L,i} \colon \pi_L V_L \to \pi_L V_L,\ \overline{p} \mapsto \pi_L(\overline{X_i p}) \qquad (p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1})$$

est bien défini, notons que $\pi_L(\overline{X_i p}) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} \cap U_L$, car si on choisit $q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}$ tel que $\overline{q} = \pi_L(\overline{X_i p})$, alors

$$\begin{aligned}\langle \overline{q}, \overline{q} \rangle_L &= \langle \pi_L(\overline{X_i p}), \overline{q} \rangle_L = \langle \overline{X_i p}, \pi_L(\overline{q}) \rangle_L \\ &\overset{\overline{q} \in \pi_L V_L}{=} \langle \overline{X_i p}, \overline{q} \rangle_L = L(X_i pq) = L(p(X_i q)) = \langle \overline{p}, \overline{X_i q} \rangle_L \overset{p \in U_L}{=} 0.\end{aligned}$$

Pour vérifier que $M_{L,i}$ est auto-adjoint, soient $p, q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}$ et observons que

$$\begin{aligned}\langle M_{L,i}(\overline{p}), \overline{q} \rangle_L &= \langle \pi_L(\overline{X_i p}), \overline{q} \rangle_L = \langle \overline{X_i p}, \pi_L(\overline{q}) \rangle_L \overset{\overline{q} \in \pi_L V_L}{=} \langle \overline{X_i p}, \overline{q} \rangle_L \\ &= L(X_i pq) = L(p(X_i q)) = \langle \overline{p}, \overline{X_i q} \rangle_L \overset{\overline{p} \in \pi_L V_L}{=} \langle \pi_L(\overline{p}), \overline{X_i q} \rangle_L \\ &= \langle \overline{p}, \pi_L(\overline{X_i q}) \rangle_L = \langle \overline{p}, M_{L,i}(\overline{q}) \rangle_L\end{aligned}$$

Construction GNS tronquée

Théorème. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tel que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Supposons que les opérateurs de multiplication tronqués de L commutent et posons

$$W_L := \left\{ \sum_{i=1}^{m} p_i q_i \mid m \in \mathbb{N}_0, p_i, q_i \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L \right\} \supseteq \mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}.$$

Alors $L|_{W_L}$ est l'intégration par rapport à une mesure de support fini.

Construction GNS tronquée

Théorème. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tel que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Supposons que les opérateurs de multiplication tronqués de L commutent et posons

$$W_L := \left\{ \sum_{i=1}^{m} p_i q_i \mid m \in \mathbb{N}_0, p_i, q_i \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L \right\} \supseteq \mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}.$$

Alors $L|_{W_L}$ est l'intégration par rapport à une mesure de support fini.

Corollaire. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tel que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Supposons que les opérateurs de multiplication tronqués de L commutent. Alors $L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}}$ est l'intégration par rapport à une mesure de support fini.

Construction GNS tronquée

Théorème. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tel que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Supposons que les opérateurs de multiplication tronqués de L commutent et posons

$$W_L := \left\{ \sum_{i=1}^{m} p_i q_i \mid m \in \mathbb{N}_0, p_i, q_i \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L \right\} \supseteq \mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}.$$

Alors $L|_{W_L}$ est l'intégration par rapport à une mesure de support fini.

Corollaire. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tel que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Supposons que les opérateurs de multiplication tronqués de L commutent. Alors $L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}}$ est l'intégration par rapport à une mesure de support fini.

Corollaire. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[X]_{2d}^*$ (une variable) tel que $L(\sum \mathbb{R}[X]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Alors $L|_{\mathbb{R}[X]_{2(d-1)}}$ est l'intégration par rapport à une mesure de support fini.

Construction GNS tronquée

Théorème. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tel que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Supposons que les opérateurs de multiplication tronqués de L commutent et posons

$$W_L := \left\{ \sum_{i=1}^{m} p_i q_i \mid m \in \mathbb{N}_0, p_i, q_i \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L \right\} \supseteq \mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}.$$

Alors $L|_{W_L}$ est l'intégration par rapport à une mesure de support fini.

Construction GNS tronquée

Théorème. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tel que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Supposons que les opérateurs de multiplication tronqués de L commutent et posons

$$W_L := \left\{ \sum_{i=1}^{m} p_i q_i \mid m \in \mathbb{N}_0, p_i, q_i \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L \right\} \supseteq \mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}.$$

Alors $L|_{W_L}$ est l'intégration par rapport à une mesure de support fini.

Preuve. Choisissons une base orthonormale $v_1, \ldots, v_r$ de $\pi_L V_L$ composée de vecteurs propres communs à tous les $M_{L,i}$,

Construction GNS tronquée

Théorème. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tel que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Supposons que les opérateurs de multiplication tronqués de L commutent et posons

$$W_L := \left\{ \sum_{i=1}^m p_i q_i \mid m \in \mathbb{N}_0, p_i, q_i \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L \right\} \supseteq \mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}.$$

Alors $L|_{W_L}$ est l'intégration par rapport à une mesure de support fini.

Preuve. Choisissons une base orthonormale $v_1, \ldots, v_r$ de $\pi_L V_L$ composée de vecteurs propres communs à tous les $M_{L,i}$, $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^n$ tels que $M_{L,i} v_j = x_{ji} v_j$ pour tout i, j

Construction GNS tronquée

Théorème. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tel que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Supposons que les opérateurs de multiplication tronqués de L commutent et posons

$$W_L := \left\{ \sum_{i=1}^{m} p_i q_i \mid m \in \mathbb{N}_0, p_i, q_i \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L \right\} \supseteq \mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}.$$

Alors $L|_{W_L}$ est l'intégration par rapport à une mesure de support fini.

Preuve. Choisissons une base orthonormale $v_1, \ldots, v_r$ de $\pi_L V_L$ composée de vecteurs propres communs à tous les $M_{L,i}$, $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^n$ tels que $M_{L,i} v_j = x_{ji} v_j$ pour tout i, j et $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ tels que $\overline{1} = a_1 v_1 + \cdots + a_r v_r$. Posons $\lambda_j := a_j^2$ pour tout j.

Construction GNS tronquée

Théorème. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tel que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Supposons que les opérateurs de multiplication tronqués de L commutent et posons

$$W_L := \left\{ \sum_{i=1}^{m} p_i q_i \mid m \in \mathbb{N}_0, p_i, q_i \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L \right\} \supseteq \mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}.$$

Alors $L|_{W_L}$ est l'intégration par rapport à une mesure de support fini.

Preuve. Choisissons une base orthonormale $v_1, \ldots, v_r$ de $\pi_L V_L$ composée de vecteurs propres communs à tous les $M_{L,i}$, $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^n$ tels que $M_{L,i} v_j = x_{ji} v_j$ pour tout i, j et $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ tels que $\overline{1} = a_1 v_1 + \cdots + a_r v_r$. Posons $\lambda_j := a_j^2$ pour tout j. Un exercice montre

$$p(M_{L,1}, \ldots, M_{L,n})(\overline{1}) = \overline{p} \text{ pour tout } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L.$$

Construction GNS tronquée

Théorème. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tel que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Supposons que les opérateurs de multiplication tronqués de L commutent et posons

$$W_L := \left\{ \sum_{i=1}^{m} p_i q_i \mid m \in \mathbb{N}_0, p_i, q_i \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L \right\} \supseteq \mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}.$$

Alors $L|_{W_L}$ est l'intégration par rapport à une mesure de support fini.

Preuve. Choisissons une base orthonormale $v_1, \dots, v_r$ de $\pi_L V_L$ composée de vecteurs propres communs à tous les $M_{L,i}$, $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$ tels que $M_{L,i} v_j = x_{ji} v_j$ pour tout i, j et $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ tels que $\overline{1} = a_1 v_1 + \dots + a_r v_r$. Posons $\lambda_j := a_j^2$ pour tout j. Un exercice montre

$$p(M_{L,1}, \dots, M_{L,n})(\overline{1}) = \overline{p} \text{ pour tout } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L.$$

Soient $p, q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L$. Alors

$$L(pq) = \langle \overline{p}, \overline{q} \rangle_L = \langle p(M_{L,1}, \dots, M_{L,n})(\overline{1}), q(M_{L,1}, \dots, M_{L,n})(\overline{1}) \rangle_L.$$

Construction GNS tronquée

Théorème. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tel que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Supposons que les opérateurs de multiplication tronqués de L commutent et posons

$$W_L := \left\{ \sum_{i=1}^{m} p_i q_i \mid m \in \mathbb{N}_0, p_i, q_i \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L \right\} \supseteq \mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}.$$

Alors $L|_{W_L}$ est l'intégration par rapport à une mesure de support fini.

Preuve. Choisissons une base orthonormale $v_1, \ldots, v_r$ de $\pi_L V_L$ composée de vecteurs propres communs à tous les $M_{L,i}$, $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^n$ tels que $M_{L,i} v_j = x_{ji} v_j$ pour tout i, j et $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ tels que $\overline{1} = a_1 v_1 + \cdots + a_r v_r$. Posons $\lambda_j := a_j^2$ pour tout j. Un exercice montre

$$p(M_{L,1}, \ldots, M_{L,n})(\overline{1}) = \overline{p} \text{ pour tout } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L.$$

Soient $p, q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L$. Alors

$$L(pq) = \left\langle \sum_{j=1}^{r} a_j p(M_{L,1}, \ldots, M_{L,n})(v_j), \sum_{k=1}^{r} a_k q(M_{L,1}, \ldots, M_{L,n})(v_k) \right\rangle_L.$$

Construction GNS tronquée

Théorème. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tel que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Supposons que les opérateurs de multiplication tronqués de L commutent et posons

$$W_L := \left\{ \sum_{i=1}^{m} p_i q_i \mid m \in \mathbb{N}_0, p_i, q_i \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L \right\} \supseteq \mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}.$$

Alors $L|_{W_L}$ est l'intégration par rapport à une mesure de support fini.

Preuve. Choisissons une base orthonormale $v_1, \ldots, v_r$ de $\pi_L V_L$ composée de vecteurs propres communs à tous les $M_{L,i}$, $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^n$ tels que $M_{L,i} v_j = x_{ji} v_j$ pour tout i, j et $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ tels que $\overline{1} = a_1 v_1 + \cdots + a_r v_r$. Posons $\lambda_j := a_j^2$ pour tout j. Un exercice montre

$$p(M_{L,1}, \ldots, M_{L,n})(\overline{1}) = \overline{p} \text{ pour tout } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L.$$

Soient $p, q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L$. Alors

$$L(pq) = \left\langle \sum_{j=1}^{r} a_j p(x_{j1}, \ldots, x_{jn}) v_j, \sum_{k=1}^{r} a_k q(x_{j1}, \ldots, x_{jn}) v_k \right\rangle_L.$$

Construction GNS tronquée

Théorème. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tel que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Supposons que les opérateurs de multiplication tronqués de L commutent et posons

$$W_L := \left\{ \sum_{i=1}^{m} p_i q_i \mid m \in \mathbb{N}_0, p_i, q_i \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L \right\} \supseteq \mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}.$$

Alors $L|_{W_L}$ est l'intégration par rapport à une mesure de support fini.

Preuve. Choisissons une base orthonormale $v_1, \dots, v_r$ de $\pi_L V_L$ composée de vecteurs propres communs à tous les $M_{L,i}$, $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$ tels que $M_{L,i} v_j = x_{ji} v_j$ pour tout i, j et $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ tels que $\overline{1} = a_1 v_1 + \dots + a_r v_r$. Posons $\lambda_j := a_j^2$ pour tout j. Un exercice montre

$$p(M_{L,1}, \dots, M_{L,n})(\overline{1}) = \overline{p} \text{ pour tout } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L.$$

Soient $p, q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L$. Alors

$$L(pq) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} a_j a_k p(x_j) q(x_j) \langle v_j, v_k \rangle_L .$$

Construction GNS tronquée

Théorème. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tel que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Supposons que les opérateurs de multiplication tronqués de L commutent et posons

$$W_L := \left\{ \sum_{i=1}^{m} p_i q_i \mid m \in \mathbb{N}_0, p_i, q_i \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L \right\} \supseteq \mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}.$$

Alors $L|_{W_L}$ est l'intégration par rapport à une mesure de support fini.

Preuve. Choisissons une base orthonormale $v_1, \dots, v_r$ de $\pi_L V_L$ composée de vecteurs propres communs à tous les $M_{L,i}$, $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$ tels que $M_{L,i} v_j = x_{ji} v_j$ pour tout i, j et $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ tels que $\overline{1} = a_1 v_1 + \dots + a_r v_r$. Posons $\lambda_j := a_j^2$ pour tout j. Un exercice montre

$$p(M_{L,1}, \dots, M_{L,n})(\overline{1}) = \overline{p} \text{ pour tout } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L.$$

Soient $p, q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L$. Alors

$$L(pq) = \sum_{j=1}^{r} a_j^2 (pq)(x_j).$$

Construction GNS tronquée

Théorème. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$ tel que $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Supposons que les opérateurs de multiplication tronqués de L commutent et posons

$$W_L := \left\{ \sum_{i=1}^{m} p_i q_i \mid m \in \mathbb{N}_0, p_i, q_i \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L \right\} \supseteq \mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}.$$

Alors $L|_{W_L}$ est l'intégration par rapport à une mesure de support fini.

Preuve. Choisissons une base orthonormale $v_1, \ldots, v_r$ de $\pi_L V_L$ composée de vecteurs propres communs à tous les $M_{L,i}$, $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^n$ tels que $M_{L,i} v_j = x_{ji} v_j$ pour tout i, j et $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ tels que $\overline{1} = a_1 v_1 + \cdots + a_r v_r$. Posons $\lambda_j := a_j^2$ pour tout j. Un exercice montre

$$p(M_{L,1}, \ldots, M_{L,n})(\overline{1}) = \overline{p} \text{ pour tout } p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L.$$

Soient $p, q \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L$. Alors

$$L(pq) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j (pq)(x_j).$$

Condition de platitude

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$, $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L' := L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}}$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L = \mathbb{R}[\underline{X}]_d$

Condition de platitude

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$, $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L' := L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}}$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L = \mathbb{R}[\underline{X}]_d$

(b) $\pi_L V_L = V_L$

Condition de platitude

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$, $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L' := L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}}$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L = \mathbb{R}[\underline{X}]_d$

(b) $\pi_L V_L = V_L$

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : (|\alpha| = d \implies \exists p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} : \underline{X}^\alpha - p \in U_L)$

Condition de platitude

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$, $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L' := L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}}$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L = \mathbb{R}[\underline{X}]_d$

(b) $\pi_L V_L = V_L$

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : (|\alpha| = d \implies \exists p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} : \underline{X}^\alpha - p \in U_L)$

(d) Dans le diagramme

$$V_{L'} = \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}/U_{L'} \twoheadleftarrow \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}/(U_L \cap \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}) \hookrightarrow \mathbb{R}[\underline{X}]_d/U_L = V_L$$

les deux applications sont des isomorphismes.

Condition de platitude

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$, $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L' := L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}}$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L = \mathbb{R}[\underline{X}]_d$

(b) $\pi_L V_L = V_L$

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : (|\alpha| = d \implies \exists p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} : \underline{X}^\alpha - p \in U_L)$

(d) Dans le diagramme

$$V_{L'} = \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}/U_{L'} \twoheadleftarrow \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}/(U_L \cap \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}) \hookrightarrow \mathbb{R}[\underline{X}]_d/U_L = V_L$$

les deux applications sont des isomorphismes.

(e) $\dim V_{L'} = \dim V_L$

Condition de platitude

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$, $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L' := L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}}$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L = \mathbb{R}[\underline{X}]_d$

(b) $\pi_L V_L = V_L$

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : (|\alpha| = d \implies \exists p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} : \underline{X}^\alpha - p \in U_L)$

(d) Dans le diagramme

$$V_{L'} = \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}/U_{L'} \twoheadleftarrow \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}/(U_L \cap \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}) \hookrightarrow \mathbb{R}[\underline{X}]_d/U_L = V_L$$

les deux applications sont des isomorphismes.

(e) $\dim V_{L'} = \dim V_L$

(f) $(L(\underline{X}^{\alpha+\beta}))_{|\alpha|,|\beta| \leq d-1}$ et $(L(\underline{X}^{\alpha+\beta}))_{|\alpha|,|\beta| \leq d}$ ont le même rang.

Condition de platitude

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$, $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L' := L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}}$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L = \mathbb{R}[\underline{X}]_d$

(b) $\pi_L V_L = V_L$

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : (|\alpha| = d \implies \exists p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} : \underline{X}^\alpha - p \in U_L)$

(d) Dans le diagramme

$$V_{L'} = \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}/U_{L'} \twoheadleftarrow \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}/(U_L \cap \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}) \hookrightarrow \mathbb{R}[\underline{X}]_d/U_L = V_L$$

les deux applications sont des isomorphismes.

(e) $\dim V_{L'} = \dim V_L$

(f) $(L(\underline{X}^{\alpha+\beta}))_{|\alpha|,|\beta| \leq d-1}$ et $(L(\underline{X}^{\alpha+\beta}))_{|\alpha|,|\beta| \leq d}$ ont le même rang.

Si (l'une de ces) conditions est remplie, nous appélons L plat.

Condition de platitude

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$, $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L' := L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}}$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L = \mathbb{R}[\underline{X}]_d$

(b) $\pi_L V_L = V_L$

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : (|\alpha| = d \implies \exists p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} : \underline{X}^\alpha - p \in U_L)$

(d) Dans le diagramme

$$V_{L'} = \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}/U_{L'} \twoheadleftarrow \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}/(U_L \cap \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}) \hookrightarrow \mathbb{R}[\underline{X}]_d/U_L = V_L$$

les deux applications sont des isomorphismes.

(e) $\dim V_{L'} = \dim V_L$

(f) $(L(\underline{X}^{\alpha+\beta}))_{|\alpha|,|\beta| \leq d-1}$ et $(L(\underline{X}^{\alpha+\beta}))_{|\alpha|,|\beta| \leq d}$ ont le même rang.

Si (l'une de ces) conditions est remplie, nous appélons L plat. On peut montrer que dans ce cas, les opérateurs GNS de multiplication tronqués de L commutent.

Condition de platitude

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{2d}^*$, $L(\sum \mathbb{R}[\underline{X}]_d^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L' := L|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_{2(d-1)}}$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} + U_L = \mathbb{R}[\underline{X}]_d$

(b) $\pi_L V_L = V_L$

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : (|\alpha| = d \implies \exists p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1} : \underline{X}^\alpha - p \in U_L)$

(d) Dans le diagramme

$$V_{L'} = \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}/U_{L'} \twoheadleftarrow \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}/(U_L \cap \mathbb{R}[\underline{X}]_{d-1}) \hookrightarrow \mathbb{R}[\underline{X}]_d/U_L = V_L$$

les deux applications sont des isomorphismes.

(e) $\dim V_{L'} = \dim V_L$

(f) $(L(\underline{X}^{\alpha+\beta}))_{|\alpha|,|\beta| \leq d-1}$ et $(L(\underline{X}^{\alpha+\beta}))_{|\alpha|,|\beta| \leq d}$ ont le même rang.

Si (l'une de ces) conditions est remplie, nous appélons L plat. On peut montrer que dans ce cas, les opérateurs GNS de multiplication tronqués de L commutent. Donc le théorème suivant de Curto et Fialkow (1996) est un corollaire : Si L est plat, alors L provient d'une mesure à support fini.

La méthode des matrices de Gram

Soient $m \in \mathbb{N}_0$, $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ et $k \in \mathbb{N}_0$. Rappelons que le module quadratic tronqué en degré k associé à $p_1, \dots, p_m$ est

$$(\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2) + (\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p_1) + \dots + (\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p_m).$$

La méthode des matrices de Gram

Soient $m \in \mathbb{N}_0$, $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ et $k \in \mathbb{N}_0$. Rappelons que le module quadratic tronqué en degré k associé à $p_1, \dots, p_m$ est

$$(\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2) + (\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p_1) + \dots + (\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p_m).$$

Nous avon appris comment écrire la condition $L(T_k(p_1, \dots, p_m)) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ sous forme d'une inégalité matricielle linéaire.

La méthode des matrices de Gram

Soient $m \in \mathbb{N}_0$, $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ et $k \in \mathbb{N}_0$. Rappelons que le module quadratic tronqué en degré k associé à $p_1, \dots, p_m$ est

$$(\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2) + (\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p_1) + \dots + (\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p_m).$$

Nous avon appris comment écrire la condition $L(T_k(p_1, \dots, p_m)) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ sous forme d'une inégalité matricielle linéaire.

Peut-on également exprimer $T_k(p_1, \dots, p_m)$ soi-même avec une inégalité matricielle linéaire ?

La méthode des matrices de Gram

Soient $m \in \mathbb{N}_0$, $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ et $k \in \mathbb{N}_0$. Rappelons que le module quadratic tronqué en degré k associé à $p_1, \dots, p_m$ est

$$(\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2) + (\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p_1) + \dots + (\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p_m).$$

Nous avon appris comment écrire la condition $L(T_k(p_1, \dots, p_m)) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ sous forme d'une inégalité matricielle linéaire.

Peut-on également exprimer $T_k(p_1, \dots, p_m)$ soi-même avec une inégalité matricielle linéaire ? Oui, en introduisant des nouvelles variables !

Soient $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k \setminus \{0\}$, $d := \left\lfloor \frac{k - \deg(p)}{2} \right\rfloor$, $u_1, \dots, u_s$ une famille génératrice de $R[\underline{X}]_d$ et $u := \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_s \end{pmatrix}$. Alors

La méthode des matrices de Gram

Soient $m \in \mathbb{N}_0$, $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ et $k \in \mathbb{N}_0$. Rappelons que le module quadratic tronqué en degré k associé à $p_1, \dots, p_m$ est

$$(\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2) + (\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p_1) + \dots + (\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p_m).$$

Nous avon appris comment écrire la condition $L(T_k(p_1, \dots, p_m)) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ sous forme d'une inégalité matricielle linéaire.

Peut-on également exprimer $T_k(p_1, \dots, p_m)$ soi-même avec une inégalité matricielle linéaire ? Oui, en introduisant des nouvelles variables !

Soient $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k \setminus \{0\}$, $d := \left\lfloor \frac{k - \deg(p)}{2} \right\rfloor$, $u_1, \dots, u_s$ une famille génératrice de $R[\underline{X}]_d$ et $u := \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_s \end{pmatrix}$. Alors

$$\mathbb{R}[\underline{X}]_k \cap \sum \mathbb{R}[\underline{X}]^2 p = \left\{ \sum_{i=1}^{s} h_i^2 p \mid h_i \in \mathbb{R}[\underline{X}]_d \right\} = \{u^* G u p \mid G \in \mathbb{R}^{s \times s}_{\succeq 0}\}.$$

Le dual d'une relaxation des moments

Considérons un POP

(P) minimiser $f(x)$ over $x \in \mathbb{R}^n$ sous contraintes $p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0$

donné par $m, n \in \mathbb{N}_0$, $f, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$.

Le dual d'une relaxation des moments

Considérons un POP

(P) minimiser $f(x)$ over $x \in \mathbb{R}^n$ sous contraintes $p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0$

donné par $m, n \in \mathbb{N}_0$, $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$.

Soit $k \in \mathbb{N}_0$ un degré de relaxation tel que $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

Le dual d'une relaxation des moments

Considérons un POP

(P) minimiser $f(x)$ over $x \in \mathbb{R}^n$ sous contraintes $p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0$

donné par $m, n \in \mathbb{N}_0$, $f, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$.

Soit $k \in \mathbb{N}_0$ un degré de relaxation tel que $f, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

La relaxation des moments de degree k (ou relaxation de Lasserre) de (P) est le PSD spécifié par

$$
\begin{array}{llrl}
(P_k) & \text{minimiser} \quad L(f) & \text{parmi les} & L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^* \\
 & & \text{sous contraintes} & L(T_k(p_1, \ldots, p_m)) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ et} \\
 & & & L(1) = 1
\end{array}
$$

Le dual d'une relaxation des moments

Considérons un POP

(P) minimiser $f(x)$ over $x \in \mathbb{R}^n$ sous contraintes $p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0$

donné par $m, n \in \mathbb{N}_0$, $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$.

Soit $k \in \mathbb{N}_0$ un degré de relaxation tel que $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

La relaxation des moments de degree k (ou relaxation de Lasserre) de (P) est le PSD spécifié par

$$
\begin{array}{llrl}
(P_k) & \text{minimiser} \quad L(f) & \text{parmi les} & L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^* \\
 & & \text{sous contraintes} & L(T_k(p_1, \dots, p_m)) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ et} \\
 & & & L(1) = 1
\end{array}
$$

On peut montrer que le PDS dual peut s'écrire da la façon suivante :

$$
\begin{array}{llrl}
(D_k) & \text{maximiser} \quad a & \text{parmi les} & a \in \mathbb{R} \\
 & & \text{sous contraintes} & f - a \in T_k(p_1, \dots, p_m)
\end{array}
$$

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Remarque (hiérarchies de relaxations). $(D_k^*)_k$ et $(P_k^*)_k$ sont des suites croissantes qui n'excèdent pas P^*.

Remark (dualité faible). $P_k^* \geq D_k^*$

Lemme. Si S est d'intérieur non-vide dans $\mathbb{R}^n$, alors T_k est fermé dans $\mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

Proposition (dualité forte). Si S est d'intérieur non-vide dans $\mathbb{R}^n$, alors $P_k^* = D_k^*$ et, à moins que $P_k^* = D_k^* = -\infty$, (D_k) a une solution unique.

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Théorème (Krivine 1964, Schmüdgen 1991, Putinar 1993). Équivalent :

(a) $\exists t \in \mathbb{N}_0 : \exists q_1, \ldots, q_t \in \mathbb{R}[\underline{X}] : (\forall I \subseteq \{1, \ldots, t\} : \prod_{i \in I} q_i \in T$ & $\{x \in \mathbb{R}^n \mid q_1(x) \geq 0, \ldots, q_t(x) \geq 0\}$ compact$)$

(b) $\exists q \in T : \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \geq 0\}$ compact

(c) $\exists N \in \mathbb{N} : N - \sum_{i=1}^n X_i^2 \in T$

(d) $\forall p \in \mathbb{R}[\underline{X}] : \exists N \in \mathbb{N} : N + p \in T$

(e) S compact & $\forall p \in \mathbb{R}[\underline{X}] : (p > 0$ on $S \implies p \in T)$

Preuve. $(e) \implies (d) \implies (c) \implies (b) \implies (a)$ sont triviaux.

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Théorème (Krivine 1964, Schmüdgen 1991, Putinar 1993). Équivalent :

(a) $\exists t \in \mathbb{N}_0 : \exists q_1, \dots, q_t \in \mathbb{R}[\underline{X}] : (\forall I \subseteq \{1, \dots, t\} : \prod_{i \in I} q_i \in T$ & $\{x \in \mathbb{R}^n \mid q_1(x) \geq 0, \dots, q_t(x) \geq 0\}$ compact)

(b) $\exists q \in T : \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \geq 0\}$ compact

(c) $\exists N \in \mathbb{N} : N - \sum_{i=1}^n X_i^2 \in T$

(d) $\forall p \in \mathbb{R}[\underline{X}] : \exists N \in \mathbb{N} : N + p \in T$

(e) S compact & $\forall p \in \mathbb{R}[\underline{X}] : (p > 0 \text{ on } S \implies p \in T)$

Preuve. $(a) \implies (c)$ très dur (démontré par Schmüdgen 1991, simplifié par Wörmann 1998, toutes les preuves utilisent le Positivstellensatz)

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Théorème (Krivine 1964, Schmüdgen 1991, Putinar 1993). Équivalent :

(a) $\exists t \in \mathbb{N}_0 : \exists q_1, \dots, q_t \in \mathbb{R}[\underline{X}] : (\forall I \subseteq \{1, \dots, t\} : \prod_{i \in I} q_i \in T$ & $\{x \in \mathbb{R}^n \mid q_1(x) \geq 0, \dots, q_t(x) \geq 0\}$ compact$)$

(b) $\exists q \in T : \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \geq 0\}$ compact

(c) $\exists N \in \mathbb{N} : N - \sum_{i=1}^n X_i^2 \in T$

(d) $\forall p \in \mathbb{R}[\underline{X}] : \exists N \in \mathbb{N} : N + p \in T$

(e) S compact & $\forall p \in \mathbb{R}[\underline{X}] : (p > 0$ on $S \implies p \in T)$

Preuve. $(c) \implies (d)$ trois lignes

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Théorème (Krivine 1964, Schmüdgen 1991, Putinar 1993). Équivalent :

(a) $\exists t \in \mathbb{N}_0 : \exists q_1, \dots, q_t \in \mathbb{R}[\underline{X}] : (\forall I \subseteq \{1, \dots, t\} : \prod_{i \in I} q_i \in T$ & $\{x \in \mathbb{R}^n \mid q_1(x) \geq 0, \dots, q_t(x) \geq 0\}$ compact)

(b) $\exists q \in T : \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \geq 0\}$ compact

(c) $\exists N \in \mathbb{N} : N - \sum_{i=1}^n X_i^2 \in T$

(d) $\forall p \in \mathbb{R}[\underline{X}] : \exists N \in \mathbb{N} : N + p \in T$

(e) S compact & $\forall p \in \mathbb{R}[\underline{X}] : (p > 0 \text{ on } S \implies p \in T)$

Preuve. $(d) \implies (e)$ Putinar 1993 (via dualité et analyse fonctionelle), Jacobi 2001 (algébrique, très difficile), Marshall 2008 (algébrique)

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Théorème (Krivine 1964, Schmüdgen 1991, Putinar 1993). Équivalent :

(a) $\exists t \in \mathbb{N}_0 : \exists q_1, \dots, q_t \in \mathbb{R}[\underline{X}] : (\forall I \subseteq \{1, \dots, t\} : \prod_{i \in I} q_i \in T$ &
$\{x \in \mathbb{R}^n \mid q_1(x) \geq 0, \dots, q_t(x) \geq 0\}$ compact)

(b) $\exists q \in T : \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \geq 0\}$ compact

(c) $\exists N \in \mathbb{N} : N - \sum_{i=1}^n X_i^2 \in T$

(d) $\forall p \in \mathbb{R}[\underline{X}] : \exists N \in \mathbb{N} : N + p \in T$

(e) S compact & $\forall p \in \mathbb{R}[\underline{X}] : (p > 0 \text{ on } S \implies p \in T)$

Si ces conditions équivalentes sont remplies, on appelle T archimédien.

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Théorème (Krivine 1964, Schmüdgen 1991, Putinar 1993). Équivalent :

(a) $\exists t \in \mathbb{N}_0 : \exists q_1, \dots, q_t \in \mathbb{R}[\underline{X}] : (\forall I \subseteq \{1, \dots, t\} : \prod_{i \in I} q_i \in T \;\&$
$\{x \in \mathbb{R}^n \mid q_1(x) \geq 0, \dots, q_t(x) \geq 0\}$ compact$)$

(b) $\exists q \in T : \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \geq 0\}$ compact

(c) $\exists N \in \mathbb{N} : N - \sum_{i=1}^n X_i^2 \in T$

(d) $\forall p \in \mathbb{R}[\underline{X}] : \exists N \in \mathbb{N} : N + p \in T$

(e) S compact & $\forall p \in \mathbb{R}[\underline{X}] : (p > 0$ on $S \implies p \in T)$

Si S est compact, on peut assurer (a) en ajoutant aux p_i leurs produits (trop coûteux si m est grand !).

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Théorème (Krivine 1964, Schmüdgen 1991, Putinar 1993). Équivalent :

(a) $\exists t \in \mathbb{N}_0 : \exists q_1, \dots, q_t \in \mathbb{R}[\underline{X}] : (\forall I \subseteq \{1, \dots, t\} : \prod_{i \in I} q_i \in T$ & $\{x \in \mathbb{R}^n \mid q_1(x) \geq 0, \dots, q_t(x) \geq 0\}$ compact)

(b) $\exists q \in T : \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \geq 0\}$ compact

(c) $\exists N \in \mathbb{N} : N - \sum_{i=1}^n X_i^2 \in T$

(d) $\forall p \in \mathbb{R}[\underline{X}] : \exists N \in \mathbb{N} : N + p \in T$

(e) S compact & $\forall p \in \mathbb{R}[\underline{X}] : (p > 0 \text{ on } S \implies p \in T)$

Si S est compact et si on connaît une boule contenant S, on peut assurer (c) facilement en ajoutant un p_i redondant.

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Théorème (Krivine 1964, Schmüdgen 1991, Putinar 1993). Équivalent :

(a) $\exists t \in \mathbb{N}_0 : \exists q_1, \dots, q_t \in \mathbb{R}[\underline{X}] : (\forall I \subseteq \{1, \dots, t\} : \prod_{i \in I} q_i \in T$ &
$\{x \in \mathbb{R}^n \mid q_1(x) \geq 0, \dots, q_t(x) \geq 0\}$ compact)

(b) $\exists q \in T : \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \geq 0\}$ compact

(c) $\exists N \in \mathbb{N} : N - \sum_{i=1}^n X_i^2 \in T$

(d) $\forall p \in \mathbb{R}[\underline{X}] : \exists N \in \mathbb{N} : N + p \in T$

(e) S compact & $\forall p \in \mathbb{R}[\underline{X}] : (p > 0$ on $S \implies p \in T)$

Corollaire. Si T est archimédien, alors $(D_k^*)_k$ et $(P_k^*)_k$ convèrgent vers P^*.

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Théorème (S. 2004). Soit $\varnothing \neq S \subseteq (-1,1)^n$, $q_1, \dots, q_t \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, $m = 2^t$ et $\{p_1, \dots, p_m\} = \{\prod_{i \in I} q_i \in T \mid I \subseteq \{1, \dots, t\}\}$. Alors il existe une constante $c = c(n, t, q_1, \dots, q_t) \in \mathbb{N}$ telle que tout $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ de degré d avec $p^* := \min\{p(x) \mid x \in S\} > 0$ appartient à T_k pour

$$k := \left\lfloor c d^2 \left(1 + \left(d^2 n^d \frac{\|p\|}{p^*}\right)^c\right) \right\rfloor$$

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Théorème (S. 2004). Soit $\varnothing \neq S \subseteq (-1,1)^n$, $q_1, \dots, q_t \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, $m = 2^t$ et $\{p_1, \dots, p_m\} = \{\prod_{i \in I} q_i \in T \mid I \subseteq \{1, \dots, t\}\}$. Alors il existe une constante $c = c(n, t, q_1, \dots, q_t) \in \mathbb{N}$ telle que tout $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ de degré d avec $p^* := \min\{p(x) \mid x \in S\} > 0$ appartient à T_k pour

$$k := \left\lfloor cd^2 \left(1 + \left(d^2 n^d \frac{\|p\|}{p^*}\right)^c\right)\right\rfloor$$

$\|p\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$ pour $p = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha \binom{|\alpha|}{\alpha_1 \dots \alpha_n} \underline{X}^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$.

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^{m} \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Corollaire (S. 2004). Soit S compact, $q_1, \dots, q_t \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, $m = 2^t$ et $\{p_1, \dots, p_m\} = \{\prod_{i \in I} q_i \in T \mid I \subseteq \{1, \dots, t\}\}$. Alors ils existent des constantes $C = C(n, f, t, q_1, \dots, q_t) \in \mathbb{N}$ et $c = c(n, t, q_1, \dots, q_t) \in \mathbb{N}$ telles que

$$0 \leq P^* - P_k^* \leq P^* - D_k^* \leq \frac{C}{\sqrt[c]{k}} \qquad \text{pour grand } k.$$

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Corollaire (S. 2004). Soit S compact, $q_1, \dots, q_t \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, $m = 2^t$ et $\{p_1, \dots, p_m\} = \{\prod_{i \in I} q_i \in T \mid I \subseteq \{1, \dots, t\}\}$. Alors ils existent des constantes $C = C(n, f, t, q_1, \dots, q_t) \in \mathbb{N}$ et $c = c(n, t, q_1, \dots, q_t) \in \mathbb{N}$ telles que

$$0 \leq P^* - P_k^* \leq P^* - D_k^* \leq \frac{C}{\sqrt[c]{k}} \qquad \text{pour grand } k.$$

On peut expliciter la dépendance de f.

La preuve donne une piste pour expliciter la dépendance des q_i.

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Théorème (Nie et S. 2007). Soit $\varnothing \neq S \subseteq (-1, 1)^n$ et soit T archimédien. Alors il existe une constante $c = c(n, m, p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{N}$ telle que tout $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ de degré d avec $p^* := \min\{p(x) \mid x \in S\} > 0$ appartient à T_k pour

$$k := \left\lfloor c \exp\left(\left(d^2 n^d \frac{\|p\|}{p^*}\right)^c\right)\right\rfloor.$$

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Théorème (Nie et S. 2007). Soit $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$ et soit T archimédien. Alors il existe une constante $c = c(n, m, p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{N}$ telle que tout $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ de degré d avec $p^* := \min\{p(x) \mid x \in S\} > 0$ appartient à T_k pour

$$k := \left\lfloor c \exp\left(\left(d^2 n^d \frac{\|p\|}{p^*}\right)^c\right)\right\rfloor.$$

$\|p\| := \max\{|a_\alpha| | \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$ pour $p = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha \binom{|\alpha|}{\alpha_1 \dots \alpha_n} \underline{X}^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$.

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Corollaire (Nie et S. 2007). Supposons que T soit archimédien. Alors ils existent des constantes $C = C(n, f, t, q_1, \ldots, q_t) \in \mathbb{N}$ et $c = c(n, t, q_1, \ldots, q_t) \in \mathbb{N}$ telles que

$$0 \leq P^* - P_k^* \leq P^* - D_k^* \leq \frac{C}{\sqrt[c]{\log \frac{k}{c}}} \qquad \text{pour grand } k.$$

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^{m} \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Corollaire (Nie et S. 2007). Supposons que T soit archimédien. Alors ils existent des constantes $C = C(n, f, t, q_1, \dots, q_t) \in \mathbb{N}$ et $c = c(n, t, q_1, \dots, q_t) \in \mathbb{N}$ telles que

$$0 \leq P^* - P_k^* \leq P^* - D_k^* \leq \frac{C}{\sqrt[c]{\log \frac{k}{c}}} \qquad \text{pour grand } k.$$

On peut encore expliciter la dépendance de f.

La preuve donne une piste pour expliciter la dépendance des q_i.

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Théorème (Krivine 1964, Schmüdgen 1991, Putinar 1993).
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]^*$, $L(T) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$.

(b) L est l'intégration par rapport à une mesure de probabilité sur S.

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Théorème (Krivine 1964, Schmüdgen 1991, Putinar 1993).
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]^*$, $L(T) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$.

(b) L est l'intégration par rapport à une mesure de probabilité sur S.

C'est le résultat dual aux résultats de Schmüdgen et Putinar.

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Théorème (S. 2005). Supposons que les L_k résolvent les (P_k) «presque de façon optimale» pour tout k. Fixons d et une norme sur $R[\underline{X}]_d^*$. Dénotons S^* l'ensemble des solutions de (P). Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il y a k tel que pour tout $\ell \geq k$, il existe une mesure de probabilité μ sur S^* telle que

$$\|L_\ell|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_d} - L_\mu\| < \varepsilon.$$

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Théorème (S. 2005). Supposons que les L_k résolvent les (P_k) «presque de façon optimale» pour tout k. Fixons d et une norme sur $R[\underline{X}]_d^*$. Dénotons S^* l'ensemble des solutions de (P). Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il y a k tel que pour tout $\ell \geq k$, il existe une mesure de probabilité μ sur S^* telle que

$$\|L_\ell|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_d} - L_\mu\| < \varepsilon.$$

Ici $L_\mu \colon \mathbb{R}[\underline{X}]_d \to \mathbb{R},\ p \mapsto \int p(x) d\mu(x)$.

Propriétés non triviales de la relaxation des moments

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $f, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k$.

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_1(x) \geq 0, \ldots, p_m(x) \geq 0\}$

On aimerait résoudre le POP : (P) minimiser $f(x)$ parmi les $x \in S$

$T_k := \{\sum_{i=0}^m \sum_j h_{ij}^2 p_i \mid h_{ij} \in \mathbb{R}[\underline{X}], \deg(h_{ij}^2 p_i) \leq k\}, \quad T := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} T_k$

(P_k) minimiser $L(f)$ parmi $L \in \mathbb{R}[\underline{X}]_k^*$ s.c. $L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $L(1) = 1$

(D_k) maximiser a parmi $a \in \mathbb{R}$ sous contraintes $f - a \in T_k$

Théorème (S. 2005). Supposons que les L_k résolvent les (P_k) «presque de façon optimale» pour tout k. Fixons d et une norme sur $R[\underline{X}]_d^*$. Dénotons S^* l'ensemble des solutions de (P). Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il y a k tel que pour tout $\ell \geq k$, il existe une mesure de probabilité μ sur S^* telle que

$$\|L_\ell|_{\mathbb{R}[\underline{X}]_d} - L_\mu\| < \varepsilon.$$

Corollaire. Si (P) n'a qu'une solution x^*, alors $\lim_{k\to\infty}(L_k(X_1), \ldots, L_k(X_n)) = x^*$.

Implémentations

- YALMIP, Linköping
  Löfberg
  http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/
- GloptiPoly, LAAS Toulouse
  Henrion, Lasserre, Löfberg
  http://www.laas.fr/~henrion/software/gloptipoly3/
- SparsePOP, Tokyo Institut of Technology
  Waki, Kim, Kojima, Muramatsu, Sugimoto, Yamashita
  http://www.is.titech.ac.jp/~kojima/SparsePOP/
- SOSTOOLS, Caltech
  Prajna, Papachristodoulou, Seiler, Parrilo
  http://www.cds.caltech.edu/sostools/

Implémentations

- YALMIP, Linköping
  Löfberg
  http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/
- GloptiPoly, LAAS Toulouse
  Henrion, Lasserre, Löfberg
  http://www.laas.fr/~henrion/software/gloptipoly3/
- SparsePOP, Tokyo Institut of Technology
  Waki, Kim, Kojima, Muramatsu, Sugimoto, Yamashita
  http://www.is.titech.ac.jp/~kojima/SparsePOP/
- SOSTOOLS, Caltech
  Prajna, Papachristodoulou, Seiler, Parrilo
  http://www.cds.caltech.edu/sostools/

Implémentations

- YALMIP, Linköping
  Löfberg
  http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/
- GloptiPoly, LAAS Toulouse
  Henrion, Lasserre, Löfberg
  http://www.laas.fr/~henrion/software/gloptipoly3/
- SparsePOP, Tokyo Institut of Technology
  Waki, Kim, Kojima, Muramatsu, Sugimoto, Yamashita
  http://www.is.titech.ac.jp/~kojima/SparsePOP/
- SOSTOOLS, Caltech
  Prajna, Papachristodoulou, Seiler, Parrilo
  http://www.cds.caltech.edu/sostools/

Implémentations

- YALMIP, Linköping
  Löfberg
  `http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/`
- GloptiPoly, LAAS Toulouse
  Henrion, Lasserre, Löfberg
  `http://www.laas.fr/~henrion/software/gloptipoly3/`
- SparsePOP, Tokyo Institut of Technology
  Waki, Kim, Kojima, Muramatsu, Sugimoto, Yamashita
  `http://www.is.titech.ac.jp/~kojima/SparsePOP/`
- SOSTOOLS, Caltech
  Prajna, Papachristodoulou, Seiler, Parrilo
  `http://www.cds.caltech.edu/sostools/`

Implémentations

- YALMIP, Linköping
  Löfberg
  http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/
- GloptiPoly, LAAS Toulouse
  Henrion, Lasserre, Löfberg
  http://www.laas.fr/~henrion/software/gloptipoly3/
- SparsePOP, Tokyo Institut of Technology
  Waki, Kim, Kojima, Muramatsu, Sugimoto, Yamashita
  http://www.is.titech.ac.jp/~kojima/SparsePOP/
- SOSTOOLS, Caltech
  Prajna, Papachristodoulou, Seiler, Parrilo
  http://www.cds.caltech.edu/sostools/