Peut-on linéariser les systèmes d'inégalités polynomiales?

Markus Schweighofer

Université de Rennes 1

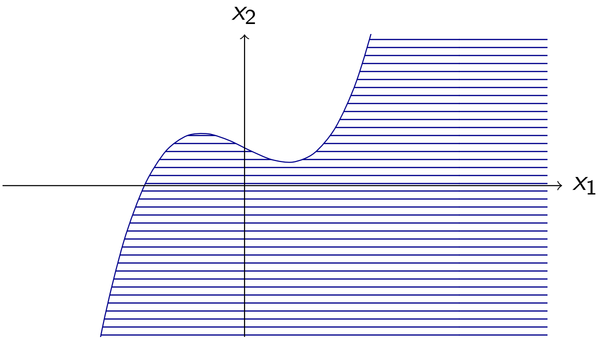
Séminaire de Géométrie Algébrique Réelle
Université d'Angers
26 juin 2008

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrr}
 & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
- & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
 & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

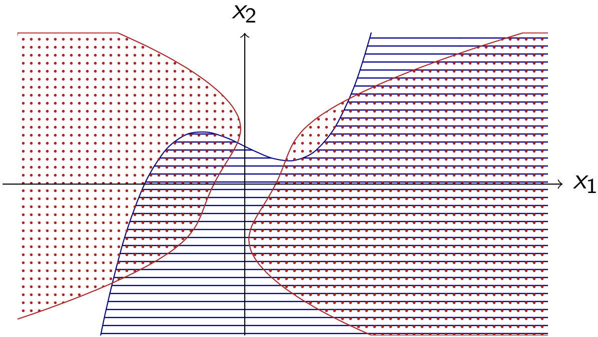
Système d'inégalités polynomiales

$$A \quad \begin{array}{rrrrrrrrrrrrr} & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\ - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\ & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \end{array}$$



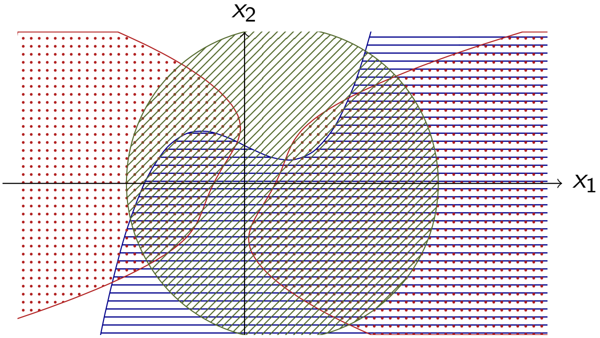
Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{ll}
A & -x_1^3 + x_1 + 2x_2 - 1 \geq 0 \\
B & -x_2^4 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \frac{1}{3} \geq 0 \\
 & -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 \geq 0
\end{array}
$$



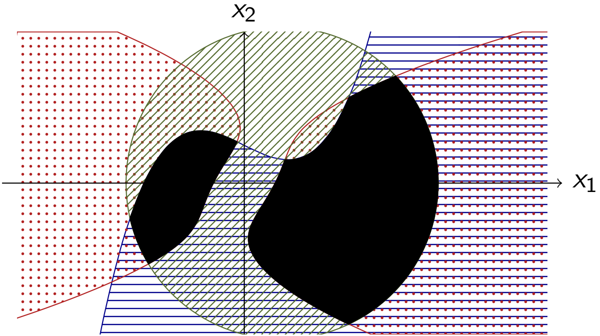
Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



Système d'inégalités polynomiales

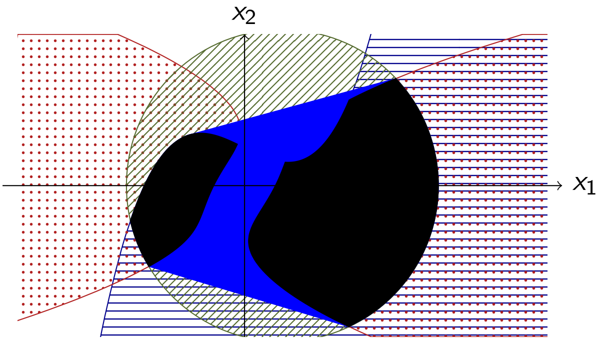
$$
\begin{array}{lrcl}
A & -x_1^3 + x_1 + 2x_2 - 1 & \geq & 0 \\
B & -x_2^4 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

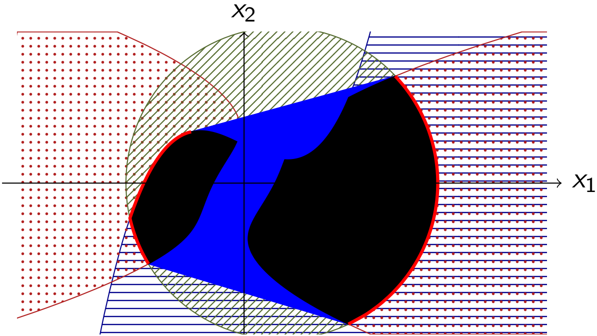


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$



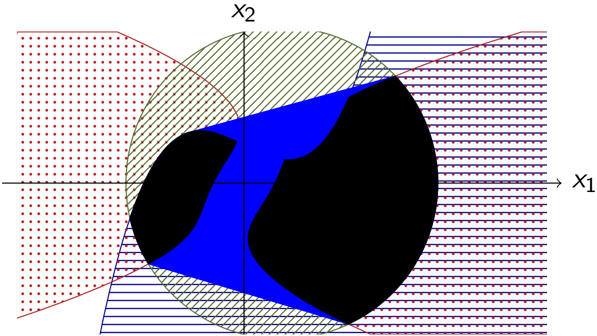
S

conv S

$S \cap \partial \operatorname{conv} S$

Système d'inégalités polynomiales

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

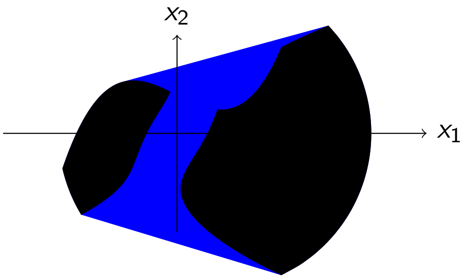


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$\begin{array}{lrrrrrrl}
A & & -x_1^3 & +x_1 & +2x_2 & -1 & \geq & 0 \\
B & -x_2^4 & +2x_1^2 & -2x_1x_2 & +x_2^2 & -\frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & -x_1^2 & -x_2^2 & +x_1 & +4 & \geq & 0
\end{array}$$

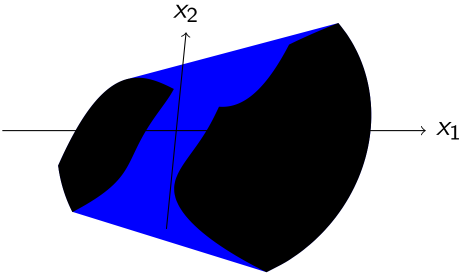


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{ll}
A & -x_1^3 + x_1 + 2x_2 - 1 \geq 0 \\
B & -x_2^4 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \frac{1}{3} \geq 0 \\
C & -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 \geq 0
\end{array}
$$

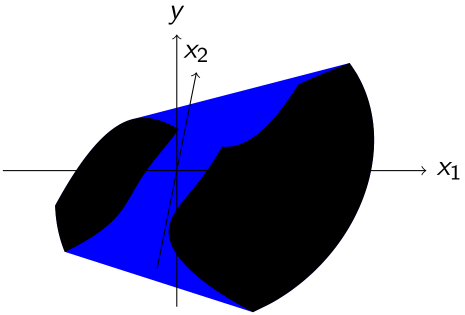


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrr}
A & & -x_1^3 & +x_1 & +2x_2 & -1 & \geq & 0 \\
B & -x_2^4 & +2x_1^2 & -2x_1x_2 & +x_2^2 & -\frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & -x_1^2 & -x_2^2 & +x_1 & +4 & \geq & 0
\end{array}
$$

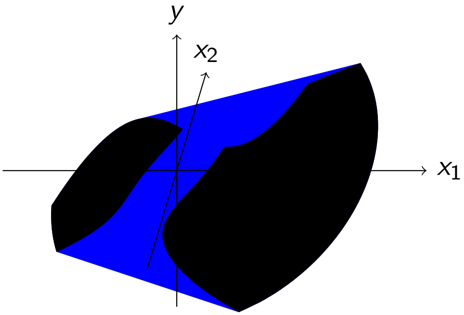


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

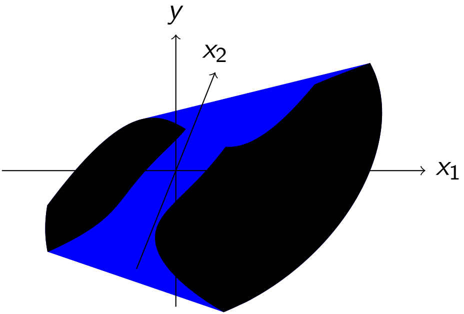


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$\begin{array}{lrrrrrrrrl}
A & & & -x_1^3 & + x_1 & + 2x_2 & - 1 & \geq 0 \\
B & -x_2^4 & + 2x_1^2 & - 2x_1x_2 & + x_2^2 & - \frac{1}{3} & & \geq 0 \\
C & & & -x_1^2 & - x_2^2 & + x_1 & + 4 & \geq 0
\end{array}$$

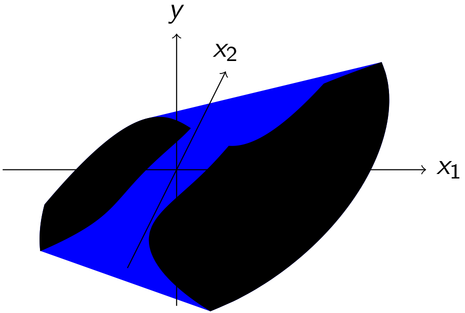


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{ll}
A & -x_1^3 + x_1 + 2x_2 - 1 \geq 0 \\
B & -x_2^4 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \frac{1}{3} \geq 0 \\
C & -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 \geq 0
\end{array}
$$

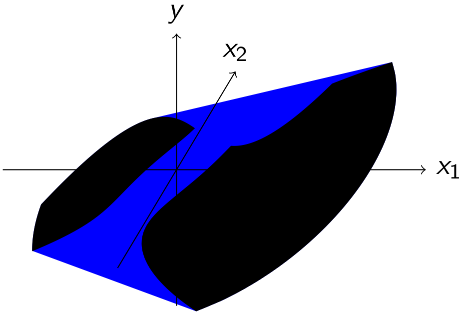


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$\begin{array}{lrrrrrrrrr}
A & & -x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq 0 \\
B & -x_2^4 & + 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq 0 \\
C & & -x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq 0
\end{array}$$

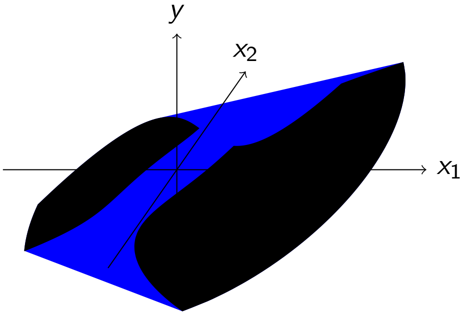


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
A & & -x_1^3 & +x_1 & +2x_2 & -1 & \geq 0 \\
B & -x_2^4 & +2x_1^2 & -2x_1x_2 & +x_2^2 & -\frac{1}{3} & \geq 0 \\
C & & -x_1^2 & -x_2^2 & +x_1 & +4 & \geq 0
\end{array}
$$

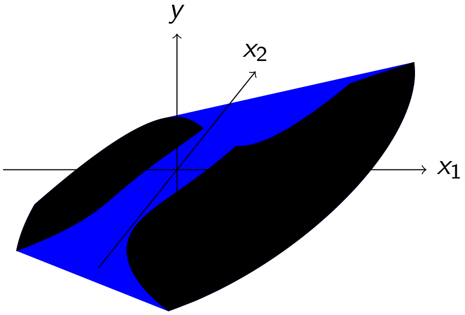


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrr}
A & & - x_1^3 & + & x_1 & + 2x_2 & - 1 & \geq & 0 \\
B & - x_2^4 & + 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + x_2^2 & - \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & - x_1^2 & - & x_2^2 & + x_1 & + 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

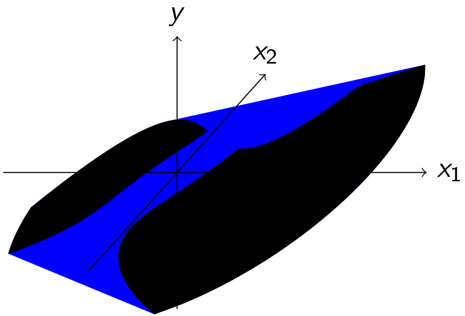


S

conv S

Système d'inégalités polynomiales

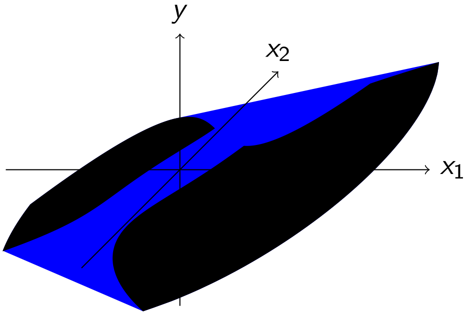
$$
\begin{array}{ll}
A & -x_1^3 + x_1 + 2x_2 - 1 \geq 0 \\
B & -x_2^4 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \frac{1}{3} \geq 0 \\
C & -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 \geq 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

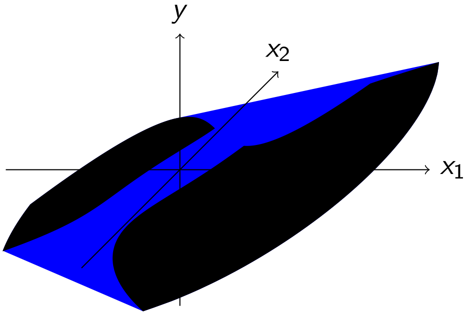
$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrl}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

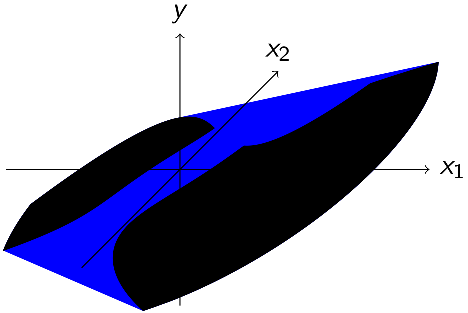
$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
A & & -x_1^3 & +x_1 & +2x_2 & -1 & \geq 0 \\
B & -x_2^4 & +2x_1^2 & -2x_1x_2 & +x_2^2 & -\frac{1}{3} & \geq 0 \\
C & & -x_1^2 & -x_2^2 & +x_1 & +4 & \geq 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

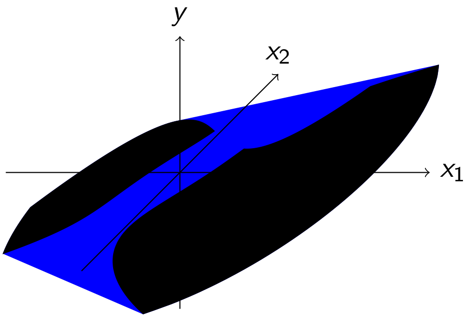
$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

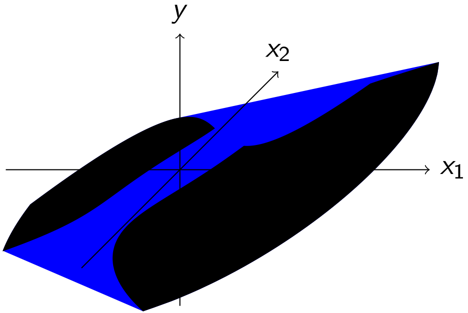
$$\begin{array}{llcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

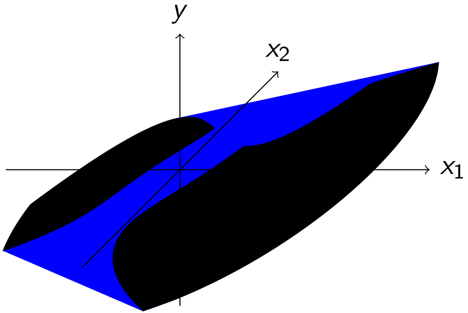
$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

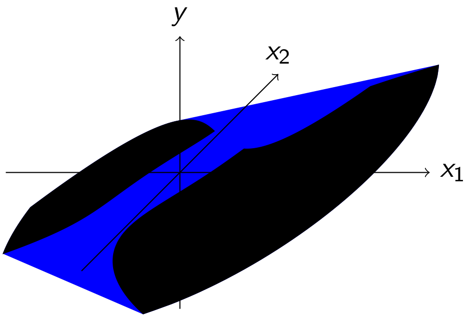
$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

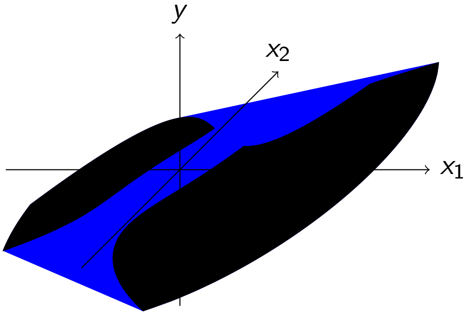
$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

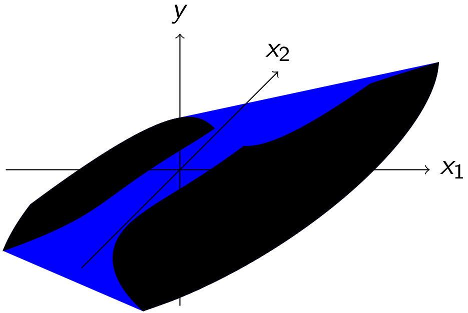
$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

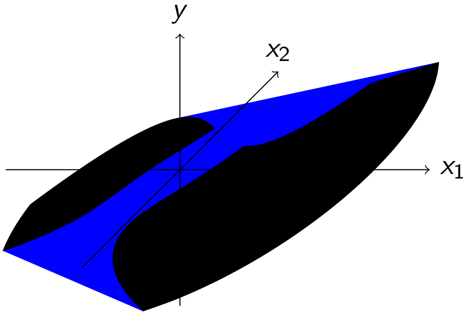
$$\begin{array}{lrrrrrrrrl}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

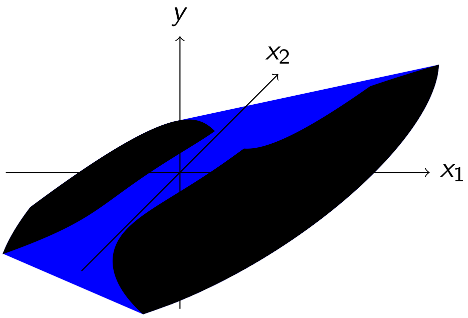
$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$



conv S

Système d'inégalités linéaires

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$



conv S

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

redondant:

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{redondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{redondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\multicolumn{13}{l}{\text{redondant:}} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{redondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{redondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{redondant:} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{llrrrrrrrrrrrrl}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4x_1^2 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{llrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \ldots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4x_1x_2 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{llrrrrrrrrrrrll}
A & & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & x_2^2 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}x_2^2 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4x_2^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & x_1^3x_2^4 & - & \dots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5x_2^4 & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} \\
AB & & y_6 & - & \ldots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} \\
AB & & y_6 & - & \ldots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & x_1^5 & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{llrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & y_6 & - & \ldots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2 C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & y_6 & - & \ldots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & x_1^5 x_2^4 & + & \ldots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2 C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & y_6 & - & \ldots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \ldots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & y_{13} & + & \ldots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \ldots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Système d'inégalités polynomiales

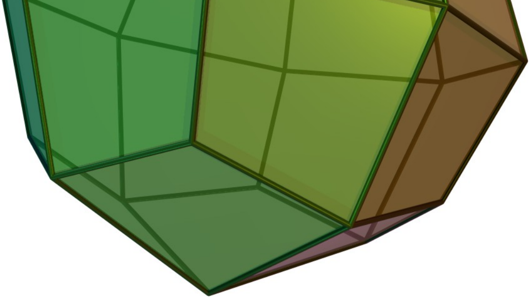
Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

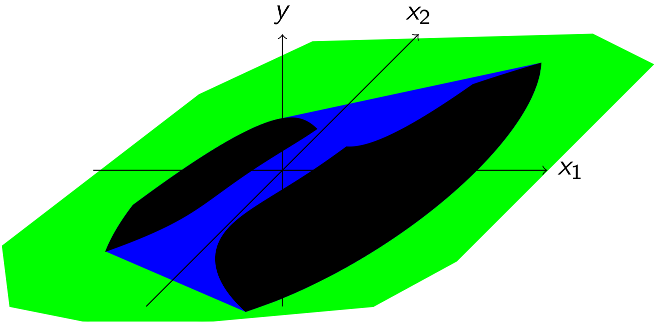
$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & y_6 & - & \dots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & y_{13} & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & x_1^4 & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0 \\
\text{irredondant:} & & & & & & & & & & & & \\
AB & & y_6 & - & \dots & - & y_5 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
AC & & y_{10} & + & \dots & - & x_1 & + & 8x_2 & - & 4 & \geq & 0 \\
ABC & - & y_{13} & + & \dots & - & \frac{13}{3}y_5 & - & \frac{8}{3}x_2 & + & \frac{4}{3} & \geq & 0 \\
D^2 & & & & & & y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 0 \\
D^2C & - & y_{18} & + & \dots & + & 4y_3 & + & 4y_4 & + & 4y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$





conv S

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrl}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
(a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2)^2 \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$(a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2)^2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$(a+bx_1+cx_2+dx_1^2+ex_1x_2+fx_2^2)\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$(a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2)^2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles redondantes (paramétrisées par a,b,c, ...):

$$(a + bx_1 + cx_2 + dx_1^2 + ex_1x_2 + fx_2^2)^2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & x_2^4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrl}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\dots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c, $\ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & x_1^2 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
x_1^2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & y_3 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & x_1x_2 & x_2^2 \\
x_1 & y_3 & x_1x_2 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & x_2^2 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 \\
x_2 & y_4 & x_2^2 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
x_2^2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & x_2^2 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & y_4 & x_2^2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
y_4 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
x_2^2 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 \\
x_2 & y_4 & y_5 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2 x_2 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 \\
x_2 & y_4 & y_5 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & x_1^2x_2 & x_1^4 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
y_4 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
y_5 & x_1x_2^2 & x_2^3 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & x_1 x_2^2 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & y_6 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & x_1 x_2^2 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & x_1 x_2^2 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & x_1 x_2^2 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & y_6 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & x_1 x_2^2 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & x_1 x_2^2 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & y_6 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & y_6 & x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\ x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & x_2^3 \\ y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\ y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\ y_5 & y_7 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & x_2^3 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & x_2^3 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3x_2 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\ x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\ y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\ y_4 & y_6 & y_7 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\ y_5 & y_7 & y_9 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\ x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\ y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & x_1^2 x_2^2 \\ y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\ y_5 & y_7 & y_9 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & x_1^2x_2^2 \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & x_1^2x_2^2 & x_1x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{11} \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & y_{11} & x_1 x_2^3 \\
y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & x_1 x_2^3 & y_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a,b,c,\ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\ x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\ y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{11} \\ y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & y_{11} & x_1 x_2^3 \\ y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & x_1 x_2^3 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\ x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\ y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{11} \\ y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \\ y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & y_{12} & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par $a, b, c, \ldots$):

$$\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
x_1 & y_3 & y_4 & y_1 & y_6 & y_7 \\
x_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_9 \\
y_3 & y_1 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{11} \\
y_4 & y_6 & y_7 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \\
y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & y_{12} & y_2
\end{pmatrix} \succeq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par a,b,c):

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0 \qquad \iff$$

$$(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4)\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles redondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} (-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$(a + bx_1 + cx_2)^2(-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} (-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4) \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-x_1^3 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & x_1^3 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles redondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-x_1^3 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & x_2^4 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\ -y_1 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \dots & \dots \\ -x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2x_1^2 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & x_1^2 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1x_2^2 + x_1^2 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2x_1x_2 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_3 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\ -y_1 - x_1x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\ -x_1^2x_2 - x_2^3 + x_1x_2 + 4x_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1 x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & x_2^2 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & x_2^2 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - x_2^2 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1 x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - x_1 x_2^2 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\ -y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\ -x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-x_1^2 x_2 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-y_7 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-y_7 - x_2^3 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

Système d'inégalités polynomiales

Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-y_7 - y_8 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0
$$

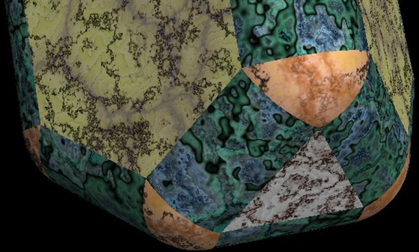
Système d'inégalités polynomiales

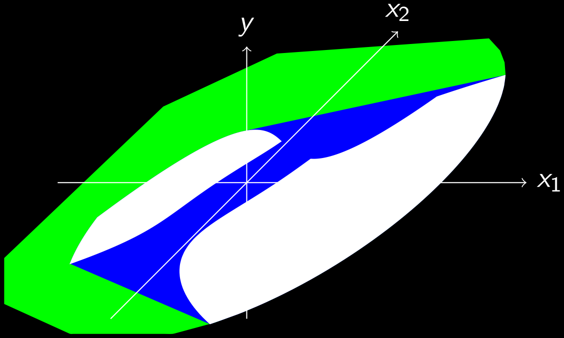
Tentative de linéarisation par l'ajout de familles d'inégalités redondantes

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrr}
A & & & - & y_1 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & 1 & \geq & 0 \\
B & - & y_2 & + & 2y_3 & - & 2y_4 & + & y_5 & - & \frac{1}{3} & \geq & 0 \\
C & & & - & y_3 & - & y_5 & + & x_1 & + & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

familles irredondantes (paramétrisées par a,b,c):

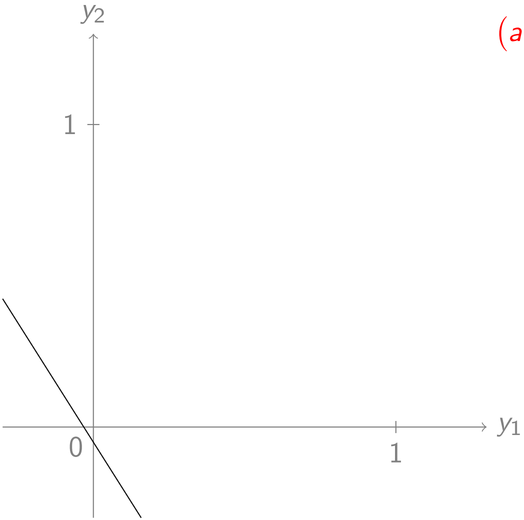
$$
\begin{pmatrix}
-y_3 - y_5 + x_1 + 4 & \dots & \dots \\
-y_1 - y_6 + y_3 + 4x_1 & \dots & \dots \\
-y_7 - y_8 + y_4 + 4x_2 & \dots & \dots
\end{pmatrix} \qquad \succeq 0
$$





$\text{conv}\ S$

Inégalité matricielle linéaire

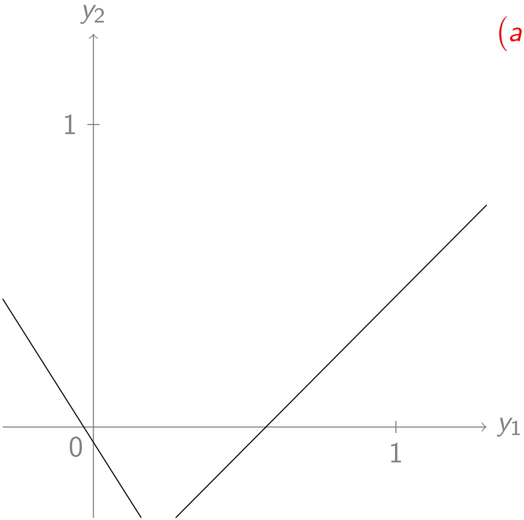


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

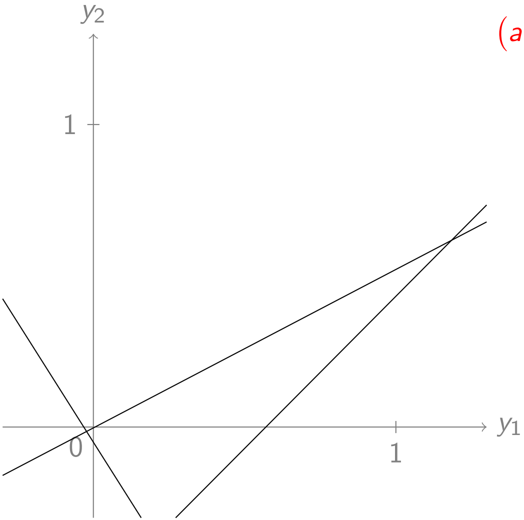


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

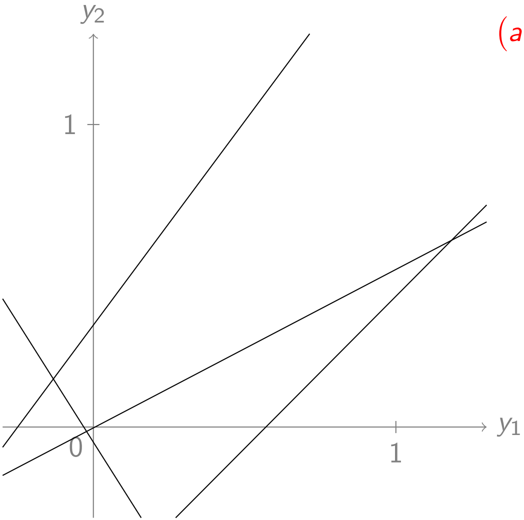


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

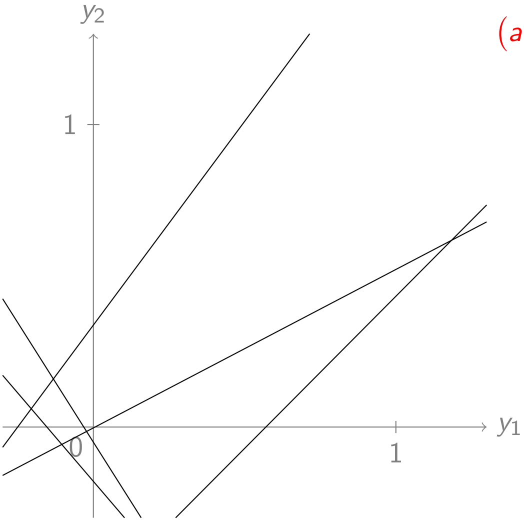


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

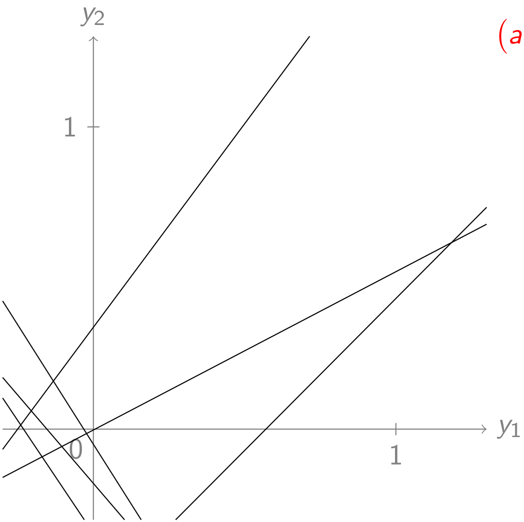
Inégalité matricielle linéaire



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants
et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

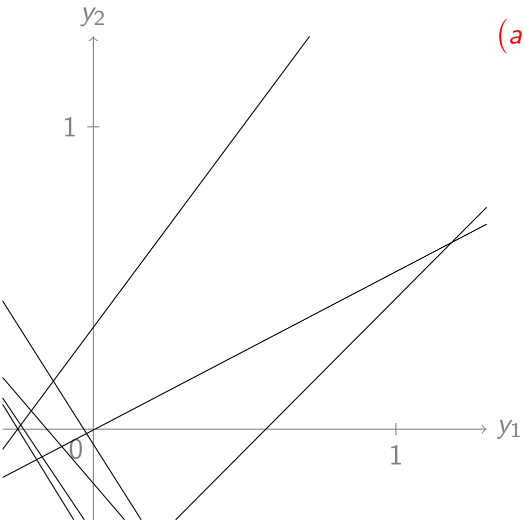


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

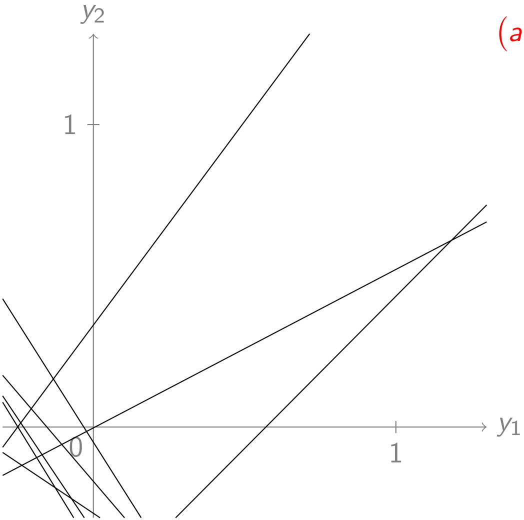


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

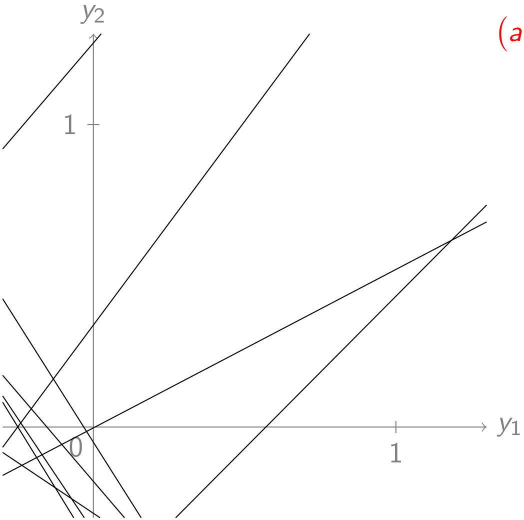


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

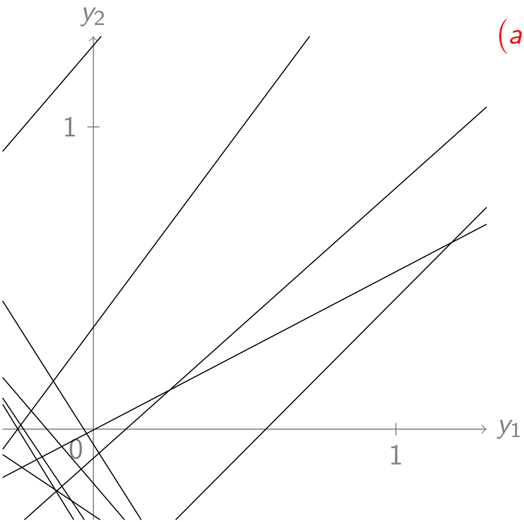


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

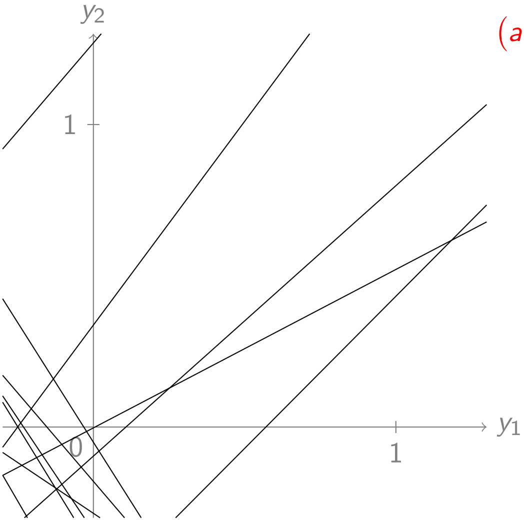


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

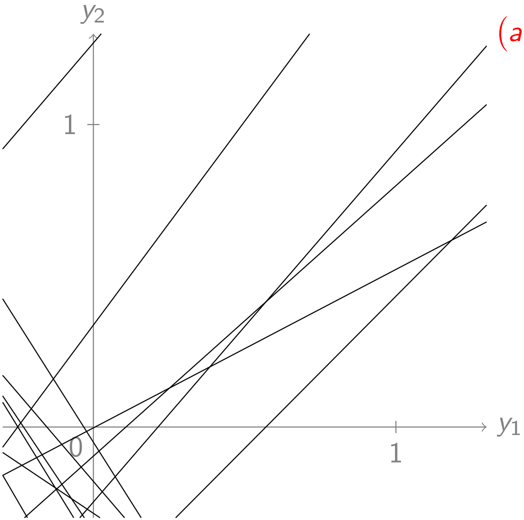


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

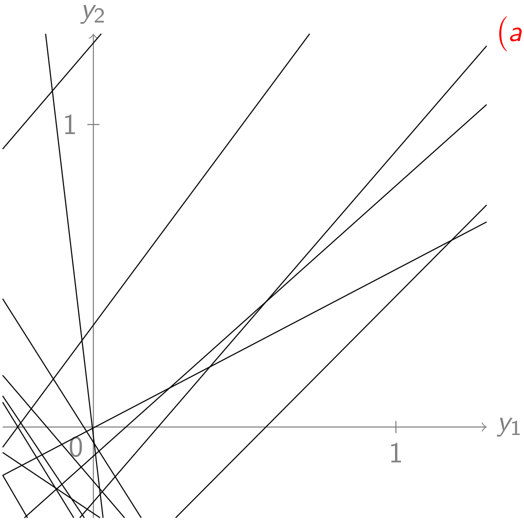


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

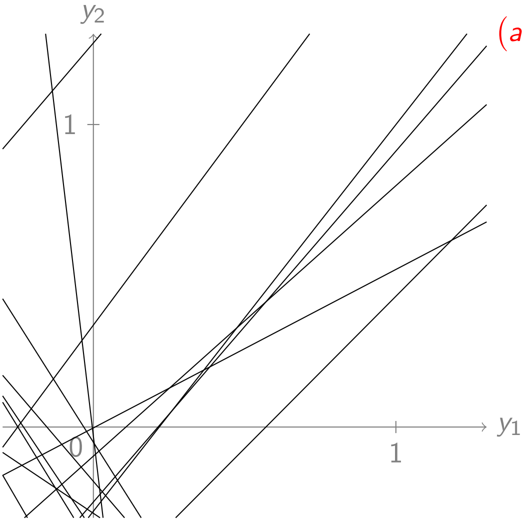
Inégalité matricielle linéaire



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants
et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

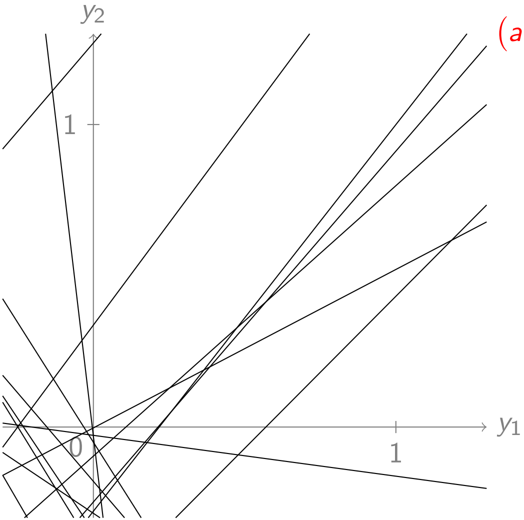


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

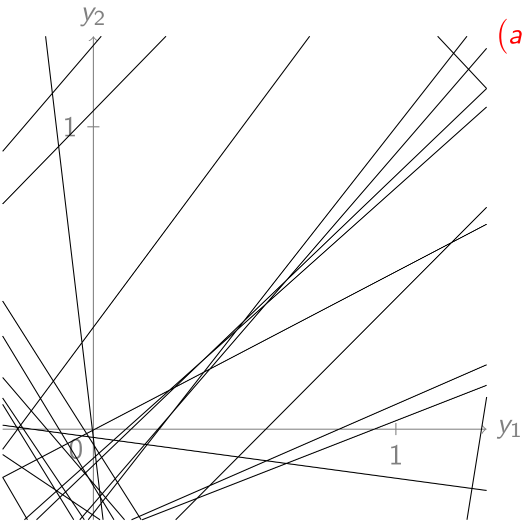
Inégalité matricielle linéaire



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants
et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

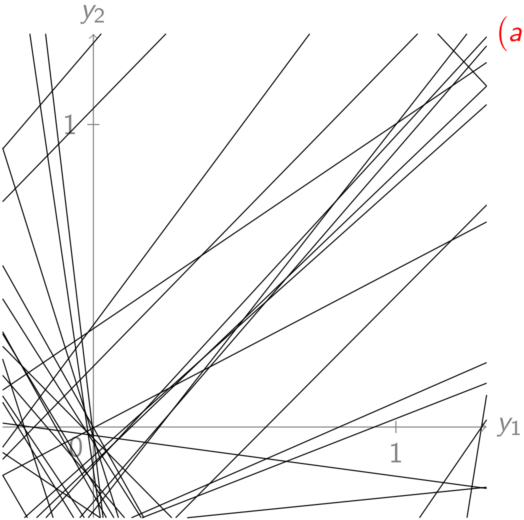


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

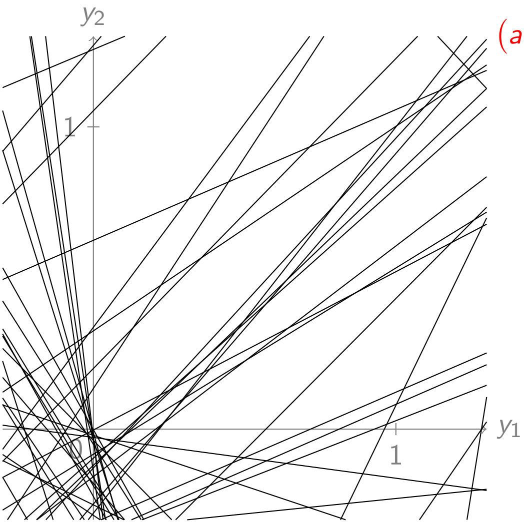
Inégalité matricielle linéaire



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants
et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

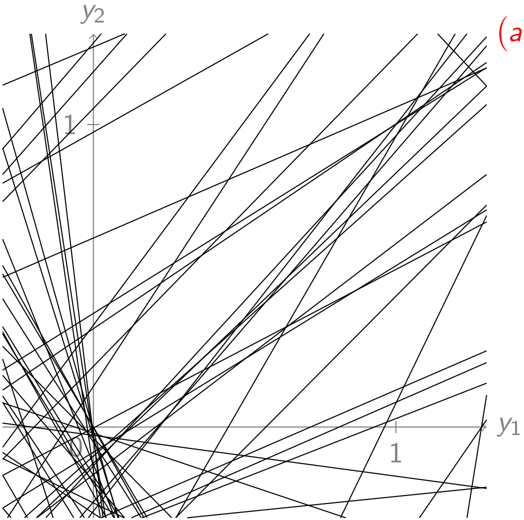


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

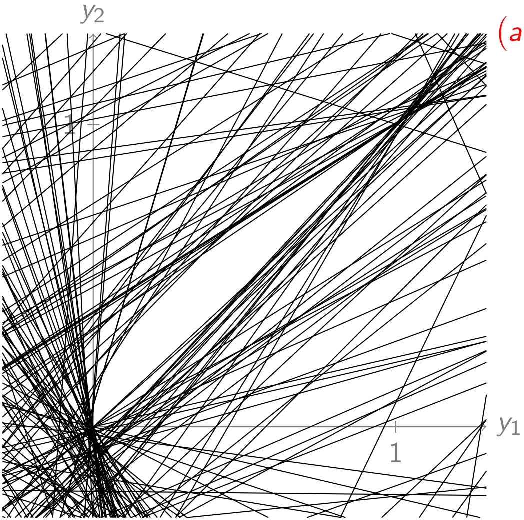
Inégalité matricielle linéaire

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

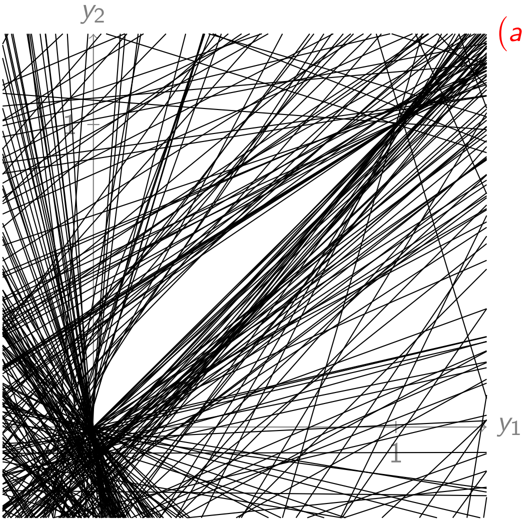


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

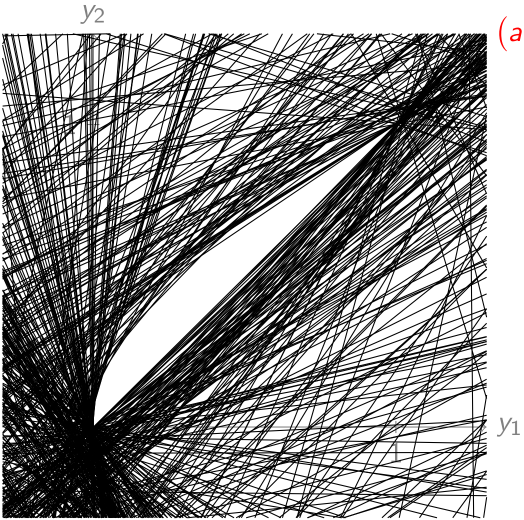


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

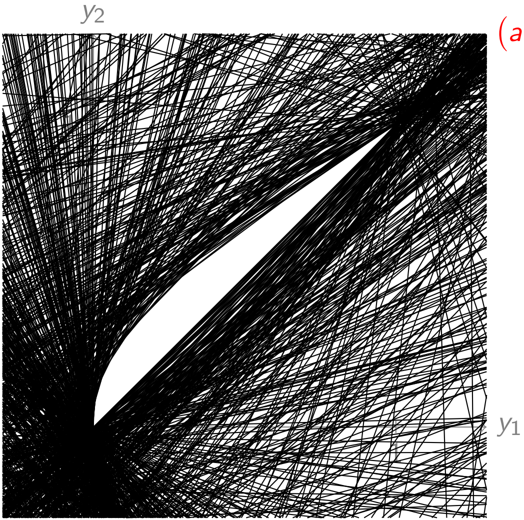


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire

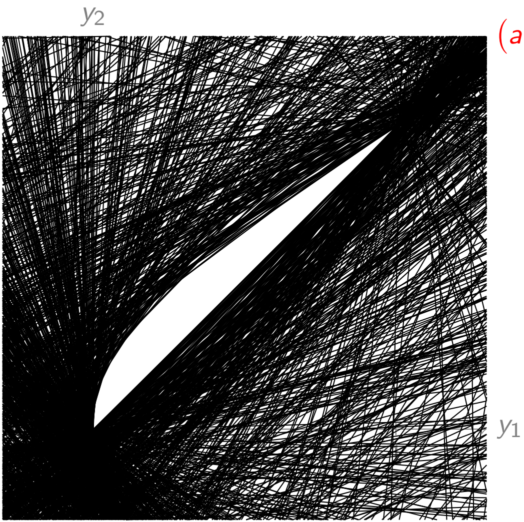


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

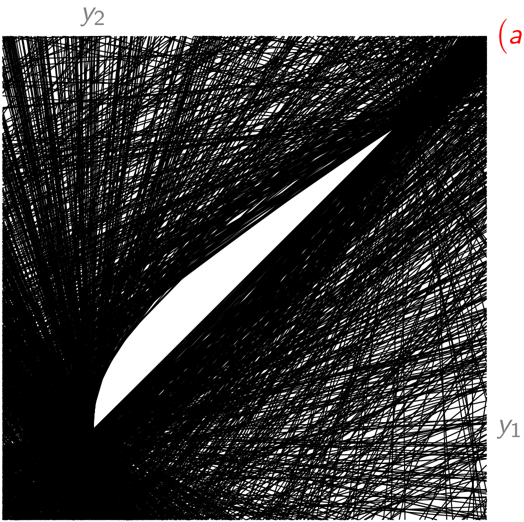
Inégalité matricielle linéaire



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants
et distribués normalement

Inégalité matricielle linéaire



$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & x_2 & y_1 \\ y_2 & 1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a,b,c indépendants

et distribués normalement

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes définissants ...

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes définissants ...
- ... l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\}$

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes définissants ...
- ... l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T := \{ \qquad s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \qquad \mathbb{R}[\bar{X}]^2 \qquad \}$

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes définissants ...
- ... l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T := \{ \sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2 \}$
  cône convexe dans $\mathbb{R}[\bar{X}]$

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes définissants ...
- ... l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T := \{ \sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2 \}$
  cône convexe dans $\mathbb{R}[\bar{X}]$
- $\mathcal{L} := \left\{ L \mid L \colon \mathbb{R}[\bar{X}] \to \mathbb{R}, L(1) = 1, L(T) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}$
  ensemble des solutions du système "linéarisé"

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes définissants ...
- ... l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T := \{ \sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2 \}$
  cône convexe dans $\mathbb{R}[\bar{X}]$
- $\mathcal{L} := \left\{ L \mid L \colon \mathbb{R}[\bar{X}] \to \mathbb{R}, L(1) = 1, L(T) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}$
  ensemble des solutions du système “linéarisé”

- $S' := \{(L(X_1), \ldots, L(X_n)) \mid L \in \mathcal{L}\}$ projeté
  relaxation de Schmüdgen

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ polynômes de degré au plus k
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes définissants ...
- ... l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T_k := \{ \sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2, \deg(s_\delta g^\delta) \leq k\}$
  cône convexe dans $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$
- $\mathcal{L}_k := \left\{ L \mid L \colon \mathbb{R}[\bar{X}]_k \to \mathbb{R}, L(1) = 1, L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}$
  ensemble des solutions du système "linéarisé"
  (définie par une inégalité matricielle linéaire)
- $S_k{}' := \{(L(X_1), \ldots, L(X_n)) \mid L \in \mathcal{L}_k\}$ projeté
  k-ième relaxation de Lasserre

- $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ polynômes de degré au plus k
- $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes définissants ...
- ... l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T_k := \{ \sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2, \deg(s_\delta g^\delta) \leq k\}$
  cône convexe dans $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$
- $\mathcal{L}_k := \left\{ L \mid L\colon \mathbb{R}[\bar{X}]_k \to \mathbb{R}, L(1) = 1, L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}$
  ensemble des solutions du système “linéarisé”
  (définie par une inégalité matricielle linéaire)
- ${S_k}' := \{(L(X_1), \dots, L(X_n)) \mid L \in \mathcal{L}_k\}$ projeté
  k-ième relaxation de Lasserre

- $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ polynômes de degré au plus k
- $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes définissants ...
- ... l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T_k := \{ \sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2, \deg(s_\delta g^\delta) \leq k\}$
  cône convexe dans $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$
- $\mathcal{L}_k := \left\{L \mid L \colon \mathbb{R}[\bar{X}]_k \to \mathbb{R}, L(1) = 1, L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}\right\}$
  ensemble des solutions du système "linéarisé"
  (définie par une inégalité matricielle linéaire)
- ${S_k}' := \{(L(X_1), \dots, L(X_n)) \mid L \in \mathcal{L}_k\}$ projeté
  k-ième relaxation de Lasserre

On a $S \subseteq \operatorname{conv} S \subseteq S' \subseteq \dots \subseteq S'_4 \subseteq S'_3 \subseteq S'_2 \subseteq S'_1$.

- $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ variables
- $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$ polynômes de degré au plus k
- $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ polynômes définissants ...
- ... l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0\}$
- $T_k := \{\sum_{\delta \in \{0,1\}^m} s_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m} \mid s_\delta \in \sum \mathbb{R}[\bar{X}]^2, \deg(s_\delta g^\delta) \leq k\}$
  cône convexe dans $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$
- $\mathcal{L}_k := \left\{L \mid L\colon \mathbb{R}[\bar{X}]_k \to \mathbb{R}, L(1) = 1, L(T_k) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}\right\}$
  ensemble des solutions du système "linéarisé"
  (définie par une inégalité matricielle linéaire)
- ${S_k}' := \{(L(X_1), \ldots, L(X_n)) \mid L \in \mathcal{L}_k\}$ projeté
  k-ième relaxation de Lasserre

On a $S \subseteq \operatorname{conv} S \subseteq S' \subseteq \ldots \subseteq S'_4 \subseteq S'_3 \subseteq S'_2 \subseteq S'_1$.
La question est si $\operatorname{conv} S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Supposons } S \neq \emptyset \text{ et fixons } k \in \mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}.}$

Proposition. $\overline{T_k} = \{f \in \mathbb{R}[\bar{X}] \mid \forall L \in \mathcal{L}_k : L(f) \geq 0\}$.

$\boxed{\text{Supposons } S \neq \emptyset \text{ et fixons } k \in \mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}.}$

Proposition. $\overline{T_k} = \{f \in \mathbb{R}[\bar{X}] \mid \forall L \in \mathcal{L}_k : L(f) \geq 0\}$.

Remarque. $\overline{\operatorname{conv} S} = \bigcap \{f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \mid f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1, f \geq 0 \text{ sur } S\}$

$$\boxed{\text{Supposons } S \neq \emptyset \text{ et fixons } k \in \mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}.}$$

Proposition. $\overline{T_k} = \{f \in \mathbb{R}[\bar{X}] \mid \forall L \in \mathcal{L}_k : L(f) \geq 0\}$.

Remarque. $\overline{\operatorname{conv} S} = \bigcap \{f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \mid f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1, f \geq 0 \text{ sur } S\}$

Proposition. $\overline{S_k'} = \bigcap \{f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \mid f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \cap \overline{T_k}\}$.

$\boxed{\text{Supposons } S \neq \emptyset \text{ et fixons } k \in \mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}.}$

Proposition. $\overline{T_k} = \{f \in \mathbb{R}[\bar{X}] \mid \forall L \in \mathcal{L}_k : L(f) \geq 0\}$.

Remarque. $\overline{\operatorname{conv} S} = \bigcap \{f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \mid f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1, f > 0 \text{ sur } S\}$

Proposition. $\overline{S'_k} = \bigcap \{f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \mid f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \cap \overline{T_k}\}$.

Proposition. Si $\operatorname{conv} S$ est fermé (en particulier si S est compact), alors $\operatorname{conv} S = S'_k \iff \forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 : (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in \overline{T_k})$.

$\boxed{\text{Supposons } S \neq \emptyset \text{ et fixons } k \in \mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}.}$

Proposition. $\overline{T_k} = \{f \in \mathbb{R}[\bar{X}] \mid \forall L \in \mathcal{L}_k : L(f) \geq 0\}$.

Remarque. $\overline{\operatorname{conv} S} = \bigcap \{f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \mid f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1, f \geq 0 \text{ sur } S\}$

Proposition. $\overline{S_k'} = \bigcap \{f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \mid f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \cap \overline{T_k}\}$.

Proposition. Si $\operatorname{conv} S$ est fermé (en particulier si S est compact), alors $\operatorname{conv} S = S_k' \iff \forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 : (f \geq 0 \text{ sur } S \implies f \in \overline{T_k})$.

Proposition (Powers & Scheiderer 2005).
Si S est d'intérieur non-vide, alors chaque T_k est fermé dans $\mathbb{R}[\bar{X}]_k$.

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991).

(a) $\forall L \in \mathcal{L}$: $\exists$ mesure de proba μ sur S: $\forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]$: $L(p) = \int p \; d\mu$

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991).

(a) $\forall L \in \mathcal{L}$: $\exists$ mesure de proba μ sur S: $\forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]$: $L(p) = \int p \; d\mu$

(b) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$: $(f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T)$

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991).

(a) $\forall L \in \mathcal{L}\colon \exists$ mesure de proba μ sur $S\colon \forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon L(p) = \int p\ d\mu$

(b) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T)$

Corollaire. $\operatorname{conv} S = S'$

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991).

(a) $\forall L \in \mathcal{L}$: $\exists$ mesure de proba μ sur S: $\forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]$: $L(p) = \int p \, d\mu$

(b) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$: ($f > 0$ sur $S \implies f \in T$)

Corollaire. conv $S = S'$

Théorème (2004). Pour $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, définissons $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$.

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991).

(a) $\forall L \in \mathcal{L}$: $\exists$ mesure de proba μ sur S: $\forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]$: $L(p) = \int p \; d\mu$

(b) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$: ($f > 0$ sur $S \implies f \in T$)

Corollaire. $\operatorname{conv} S = S'$

Théorème (2004). Pour $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{\alpha_1 \; \ldots \; \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, définissons $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Supposons $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$.

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991).

(a) $\forall L \in \mathcal{L}$: $\exists$ mesure de proba μ sur S: $\forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]$: $L(p) = \int p \, d\mu$

(b) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$: ($f > 0$ sur $S \implies f \in T$)

Corollaire. $\operatorname{conv} S = S'$

Théorème (2004). Pour $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{\alpha_1 \ \ldots \ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, définissons $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Supposons $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$. Alors il y a une constante $c \in \mathbb{N}$ (qui de dépend que de n, m et $g_1, \ldots, g_m$)

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991).

(a) $\forall L \in \mathcal{L}\colon \exists$ mesure de proba μ sur $S\colon \forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon L(p) = \int p\, d\mu$

(b) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T)$

Corollaire. $\operatorname{conv} S = S'$

Théorème (2004). Pour $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1\ \dots\ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, définissons $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Supposons $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$. Alors il y a une constante $c \in \mathbb{N}$ (qui de dépend que de n, m et $g_1, \dots, g_m$) tel que, pour tout $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_d$ avec $f^* := \min\{f(x) \mid x \in S\} > 0$,

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991).

(a) $\forall L \in \mathcal{L}\colon \exists$ mesure de proba μ sur $S\colon \forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon L(p) = \int p\, d\mu$

(b) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T)$

Corollaire. $\operatorname{conv} S = S'$

Théorème (2004). Pour $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, définissons $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Supposons $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$. Alors il y a une constante $c \in \mathbb{N}$ (qui de dépend que de n, m et $g_1, \dots, g_m$) tel que, pour tout $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_d$ avec $f^* := \min\{f(x) \mid x \in S\} > 0$, nous avons $f \in T_k$ pour un

$$k \leq cd^2 \left(1 + \left(d^2 n^d \frac{\|f\|}{f^*}\right)^c\right).$$

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991).

(a) $\forall L \in \mathcal{L}$: $\exists$ mesure de proba μ sur S: $\forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]$: $L(p) = \int p \, d\mu$

(b) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$: $(f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T)$

Corollaire. $\operatorname{conv} S = S'$

Théorème (2004). Pour $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, définissons $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Supposons $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$. Alors il y a une constante $c \in \mathbb{N}$ (qui de dépend que de n, m et $g_1, \dots, g_m$) tel que, pour tout $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1$ avec $f^* := \min\{f(x) \mid x \in S\} > 0$, nous avons $f \in T_k$ pour un

$$k \leq c\left(1 + \left(n\frac{\|f\|}{f^*}\right)^c\right).$$

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991).

(a) $\forall L \in \mathcal{L}\colon \exists$ mesure de proba μ sur $S\colon \forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon L(p) = \int p\, d\mu$

(b) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]\colon (f > 0 \text{ sur } S \implies f \in T)$

Corollaire. $\operatorname{conv} S = S'$

Théorème (2004). Pour $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, définissons $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Supposons $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$. Alors il y a une constante $c \in \mathbb{N}$ (qui de dépend que de n, m et $g_1, \dots, g_m$) tel que, pour tout $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1$ avec $f^* := \min\{f(x) \mid x \in S\} > 0$, nous avons $f \in T_k$ pour un

$$k \leq c \left(1 + \left(\frac{\|f\|}{f^*}\right)^c\right).$$

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991).

(a) $\forall L \in \mathcal{L}$: $\exists$ mesure de proba μ sur S: $\forall p \in \mathbb{R}[\bar{X}]$: $L(p) = \int p \, d\mu$

(b) $\forall f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$: ($f > 0$ sur $S \implies f \in T$)

Corollaire. $\operatorname{conv} S = S'$

Théorème (2004). Pour $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \binom{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{\alpha_1 \ \ldots \ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, définissons $\|f\| := \max\{|a_\alpha| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Supposons $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$. Alors il y a une constante $c \in \mathbb{N}$ (qui de dépend que de n, m et $g_1, \ldots, g_m$) tel que, pour tout $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1$ avec $f^* := \min\{f(x) \mid x \in S\} > 0$, nous avons $f \in T_k$ pour un

$$k \leq c \left(1 + \left(\frac{\|f\|}{f^*}\right)^c\right).$$

Corollaire. $\exists c \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}_{\geq c} : \forall x \in S'_k : \operatorname{dist}(x, \operatorname{conv} S) \leq \frac{c}{\sqrt[c]{k}}$

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991). Pour tout $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$:
$f > 0$ sur $S \implies \exists p_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{1\times *}$: $f = \sum_{\delta\in\{0,1\}} p_\delta p_\delta^T g^\delta$

Corollaire (Hol & Scherer 2008). Pour tout $F \in S\mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$:
$F \succ 0$ sur $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times *}$: $F = \sum_{\delta\in\{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991). Pour tout $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$:
$f > 0$ sur $S \implies \exists p_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{1\times *}$: $f = \sum_{\delta \in \{0,1\}} p_\delta p_\delta^T g^\delta$

Corollaire (Hol & Scherer 2008). Pour tout $F \in S\mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$:
$F \succ 0$ sur $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times *}$: $F = \sum_{\delta \in \{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Proof (M.S.). Étant donné $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ avec $F \succ 0$ sur S, on considère $f := Y \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ et on observe que $f > 0$ sur

$$\begin{aligned} S_F &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S, \text{ y eigenvalue of F(x)}\} \\ &= \{(x,y) \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0, p_F(x,y) = 0\} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991). Pour tout $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$:
$f > 0$ sur $S \implies \exists p_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{1\times *}$: $f = \sum_{\delta\in\{0,1\}} p_\delta p_\delta^T g^\delta$

Corollaire (Hol & Scherer 2008). Pour tout $F \in S\mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$:
$F \succ 0$ sur $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times *}$: $F = \sum_{\delta\in\{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Proof (M.S.). Étant donné $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ avec $F \succ 0$ sur S, on considère $f := Y \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ et on observe que $f > 0$ sur

$$\begin{aligned} S_F &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S, \text{ y eigenvalue of F(x)}\} \\ &= \{(x,y) \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0, p_F(x,y) = 0\} \end{aligned}$$

où $P_F \in \mathbb{R}[\bar{X}][Y] = \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ est le polynôme caractéristique de F.

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991). Pour tout $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$:
$f > 0$ sur $S \implies \exists p_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{1\times *}$: $f = \sum_{\delta\in\{0,1\}} p_\delta p_\delta^T g^\delta$

Corollaire (Hol & Scherer 2008). Pour tout $F \in S\mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$:
$F \succ 0$ sur $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times *}$: $F = \sum_{\delta\in\{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Proof (M.S.). Étant donné $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ avec $F \succ 0$ sur S,
on considère $f := Y \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ et on observe que $f > 0$ sur

$$\begin{aligned} S_F &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S, \text{ y eigenvalue of F(x)}\} \\ &= \{(x,y) \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0, p_F(x,y) = 0\} \end{aligned}$$

où $P_F \in \mathbb{R}[\bar{X}][Y] = \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ est le polynôme caractéristique de F.
Appliquer Schmüdgen à $f = Y$.

Supposons que S soit compact.

Théorème (Schmüdgen 1991). Pour tout $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$:
$f > 0$ sur $S \implies \exists p_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{1\times *}$: $f = \sum_{\delta \in \{0,1\}} p_\delta p_\delta^T g^\delta$

Corollaire (Hol & Scherer 2008). Pour tout $F \in S\mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$:
$F \succ 0$ sur $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times *}$: $F = \sum_{\delta \in \{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Proof (M.S.). Étant donné $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ avec $F \succ 0$ sur S, on considère $f := Y \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ et on observe que $f > 0$ sur

$$\begin{aligned} S_F &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S, \text{ y eigenvalue of F(x)}\} \\ &= \{(x,y) \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0, p_F(x,y) = 0\} \end{aligned}$$

où $P_F \in \mathbb{R}[\bar{X}][Y] = \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ est le polynôme caractéristique de F.
Appliquer Schmüdgen à $f = Y$. Utiliser $\mathbb{R}[\bar{X}, Y] \to \mathbb{R}[\bar{X}, F] \subseteq \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$
($\mathbb{R}[\bar{X}, F]$ est commutatif).

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991). Pour tout $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$:
$f > 0$ sur $S \implies \exists p_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{1\times *}$: $f = \sum_{\delta\in\{0,1\}} p_\delta p_\delta^T g^\delta$

Corollaire (Hol & Scherer 2008). Pour tout $F \in S\mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$:
$F \succ 0$ sur $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times *}$: $F = \sum_{\delta\in\{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Proof (M.S.). Étant donné $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ avec $F \succ 0$ sur S, on considère $f := Y \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ et on observe que $f > 0$ sur

$$\begin{aligned} S_F &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S, \text{ y eigenvalue of F(x)}\} \\ &= \{(x,y) \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0, p_F(x,y) = 0\} \end{aligned}$$

où $P_F \in \mathbb{R}[\bar{X}][Y] = \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ est le polynôme caractéristique de F.
Appliquer Schmüdgen à $f = Y$. Utiliser $\mathbb{R}[\bar{X}, Y] \to \mathbb{R}[\bar{X}, F] \subseteq \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ ($\mathbb{R}[\bar{X}, F]$ est commutatif). Comme $P_F(\bar{X}, F) = 0$ par Cayley-Hamilton, p_F disparaît dans cette représentation.

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact.}}$

Théorème (Schmüdgen 1991). Pour tout $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$:
$f > 0$ sur $S \implies \exists p_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{1\times *}$: $f = \sum_{\delta\in\{0,1\}} p_\delta p_\delta^T g^\delta$

Corollaire (Hol & Scherer 2008). Pour tout $F \in S\mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$:
$F \succ 0$ sur $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times *}$: $F = \sum_{\delta\in\{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Proof (M.S.). Étant donné $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ avec $F \succ 0$ sur S, on considère $f := Y \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ et on observe que $f > 0$ sur

$$\begin{aligned} S_F &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S, \text{ y eigenvalue of F(x)}\} \\ &= \{(x,y) \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0, p_F(x,y) = 0\} \end{aligned}$$

où $P_F \in \mathbb{R}[\bar{X}][Y] = \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ est le polynôme caractéristique de F.
Appliquer Schmüdgen à $f = Y$. Utiliser $\mathbb{R}[\bar{X}, Y] \to \mathbb{R}[\bar{X}, F] \subseteq \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ ($\mathbb{R}[\bar{X}, F]$ est commutatif). Comme $P_F(\bar{X}, F) = 0$ par Cayley-Hamilton, p_F disparaît dans cette représentation. Profiter du fait qu'on peut calculer avec les matrices par blocs!

Supposons que S soit compact.

Théorème (Schmüdgen 1991). Pour tout $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]$:
$f > 0$ sur $S \implies \exists p_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{1\times *}$: $f = \sum_{\delta\in\{0,1\}} p_\delta p_\delta^T g^\delta$

Corollaire (Hol & Scherer 2008). Pour tout $F \in S\mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$:
$F \succ 0$ sur $S \implies \exists P_\delta \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times *}$: $F = \sum_{\delta\in\{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$

Proof (M.S.). Étant donné $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ avec $F \succ 0$ sur S, on considère $f := Y \in \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ et on observe que $f > 0$ sur

$$\begin{aligned} S_F &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S, \text{ y eigenvalue of F(x)}\} \\ &= \{(x,y) \mid g_1(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0, p_F(x,y) = 0\} \end{aligned}$$

où $P_F \in \mathbb{R}[\bar{X}][Y] = \mathbb{R}[\bar{X}, Y]$ est le polynôme caractéristique de F.
Appliquer Schmüdgen à $f = Y$. Utiliser $\mathbb{R}[\bar{X}, Y] \to \mathbb{R}[\bar{X}, F] \subseteq \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ ($\mathbb{R}[\bar{X}, F]$ est commutatif). Comme $P_F(\bar{X}, F) = 0$ par Cayley-Hamilton, p_F disparaît dans cette représentation. Profiter du fait qu'on peut calculer avec les matrices par blocs!

Problème: De cette façon, on n'obtient pas les bornes sur le degré comme pour Schmüdgen.

La démonstration originale de Hol & Scherer reproduit mes constructions algébriques pour les polynômes à coefficients matriciels. C'est également la façon dont Helton and Nie ont obtenu des bornes sur le degré pour le théorème de Hol & Scherer.

La démonstration originale de Hol & Scherer reproduit mes constructions algébriques pour les polynômes à coefficients matriciels. C'est également la façon dont Helton and Nie ont obtenu des bornes sur le degré pour le théorème de Hol & Scherer. Cependant on peut même éviter d'introduire des coefficient matriciels en identifiant $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ avec

La démonstration originale de Hol & Scherer reproduit mes constructions algébriques pour les polynômes à coefficients matriciels. C'est également la façon dont Helton and Nie ont obtenu des bornes sur le degré pour le théorème de Hol & Scherer. Cependant on peut même éviter d'introduire des coefficient matriciels en identifiant $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t \times t}$ avec la famille $(f_a)_{a \in S^{t-1}}$ des polynômes $f_a := a^T F a \in \mathbb{R}[\bar{X}]$

La démonstration originale de Hol & Scherer reproduit mes constructions algébriques pour les polynômes à coefficients matriciels. C'est également la façon dont Helton and Nie ont obtenu des bornes sur le degré pour le théorème de Hol & Scherer. Cependant on peut même éviter d'introduire des coefficient matriciels en identifiant $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ avec la famille $(f_a)_{a\in S^{t-1}}$ des polynômes $f_a := a^T F a \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et en effectuant mes constructions algébriques uniformément et simultanément pour tout $a \in S^{t-1}$.

La démonstration originale de Hol & Scherer reproduit mes constructions algébriques pour les polynômes à coefficients matriciels. C'est également la façon dont Helton and Nie ont obtenu des bornes sur le degré pour le théorème de Hol & Scherer. Cependant on peut même éviter d'introduire des coefficient matriciels en identifiant $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ avec la famille $(f_a)_{a\in S^{t-1}}$ des polynômes $f_a := a^T F a \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et en effectuant mes constructions algébriques uniformément et simultanément pour tout $a \in S^{t-1}$.

Théorème (Helton & Nie). Pour $F = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} A_\alpha \binom{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{\alpha_1\ \dots\ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $A_\alpha \in S\mathbb{R}^{t\times t}$, définissons $\|F\| := \max\{\|A_\alpha\| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$.

La démonstration originale de Hol & Scherer reproduit mes constructions algébriques pour les polynômes à coefficients matriciels. C'est également la façon dont Helton and Nie ont obtenu des bornes sur le degré pour le théorème de Hol & Scherer. Cependant on peut même éviter d'introduire des coefficient matriciels en identifiant $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ avec la famille $(f_a)_{a\in S^{t-1}}$ des polynômes $f_a := a^T F a \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et en effectuant mes constructions algébriques uniformément et simultanément pour tout $a \in S^{t-1}$.

Théorème (Helton & Nie). Pour $F = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} A_\alpha \binom{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{\alpha_1\ \dots\ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $A_\alpha \in S\mathbb{R}^{t\times t}$, définissons $\|F\| := \max\{\|A_\alpha\| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$.
Supposons $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$.

La démonstration originale de Hol & Scherer reproduit mes constructions algébriques pour les polynômes à coefficients matriciels. C'est également la façon dont Helton and Nie ont obtenu des bornes sur le degré pour le théorème de Hol & Scherer. Cependant on peut même éviter d'introduire des coefficient matriciels en identifiant $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ avec la famille $(f_a)_{a\in S^{t-1}}$ des polynômes $f_a := a^T F a \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et en effectuant mes constructions algébriques uniformément et simultanément pour tout $a \in S^{t-1}$.

Théorème (Helton & Nie). Pour $F = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} A_\alpha \binom{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{\alpha_1\ \dots\ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $A_\alpha \in S\mathbb{R}^{t\times t}$, définissons $\|F\| := \max\{\|A_\alpha\| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Supposons $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$.Alors il y a une constante $c \in \mathbb{N}$ (ne dépendant que de n, m et $g_1,\dots,g_m$)

La démonstration originale de Hol & Scherer reproduit mes constructions algébriques pour les polynômes à coefficients matriciels. C'est également la façon dont Helton and Nie ont obtenu des bornes sur le degré pour le théorème de Hol & Scherer. Cependant on peut même éviter d'introduire des coefficient matriciels en identifiant $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ avec la famille $(f_a)_{a\in S^{t-1}}$ des polynômes $f_a := a^T F a \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et en effectuant mes constructions algébriques uniformément et simultanément pour tout $a \in S^{t-1}$.

Théorème (Helton & Nie). Pour $F = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} A_\alpha \binom{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{\alpha_1\ \dots\ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $A_\alpha \in S\mathbb{R}^{t\times t}$, définissons $\|F\| := \max\{\|A_\alpha\| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Supposons $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$.Alors il y a une constante $c \in \mathbb{N}$ (ne dépendant que de n, m et $g_1,\dots,g_m$) tel que, pour tout $F \in S\mathbb{R}[\bar{X}]_d^{t\times t}$ avec $F^* := \min\{\lambda_{\min}(F(x)) \mid x \in S\} > 0$,

La démonstration originale de Hol & Scherer reproduit mes constructions algébriques pour les polynômes à coefficients matriciels. C'est également la façon dont Helton and Nie ont obtenu des bornes sur le degré pour le théorème de Hol & Scherer. Cependant on peut même éviter d'introduire des coefficient matriciels en identifiant $F \in \mathbb{R}[\bar{X}]^{t\times t}$ avec la famille $(f_a)_{a\in S^{t-1}}$ des polynômes $f_a := a^T F a \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et en effectuant mes constructions algébriques uniformément et simultanément pour tout $a \in S^{t-1}$.

Théorème (Helton & Nie). Pour $F = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} A_\alpha \binom{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{\alpha_1\ \dots\ \alpha_n} \bar{X}^\alpha$, $A_\alpha \in S\mathbb{R}^{t\times t}$, définissons $\|F\| := \max\{\|A_\alpha\| \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Supposons $\emptyset \neq S \subseteq (-1,1)^n$.Alors il y a une constante $c \in \mathbb{N}$ (ne dépendant que de n, m et $g_1,\dots,g_m$) tel que, pour tout $F \in S\mathbb{R}[\bar{X}]_d^{t\times t}$ avec $F^* := \min\{\lambda_{\min}(F(x)) \mid x \in S\} > 0$, on a $F = \sum_{\delta\in\{0,1\}} P_\delta P_\delta^T g^\delta$ pour certains $P_\delta \in S\mathbb{R}[\bar{X}]_k^{t\times t}$ avec

$$k \leq cd^2\left(1+\left(d^2 n^d \frac{\|F\|}{F^*}\right)^c\right).$$

Concavité

La terminologie suivante n'est pas standard mais nous convient.
Il s'agit d'une sorte de concavité locale d'une fonction détectable par la dérivée seconde.

Concavité

La terminologie suivante n'est pas standard mais nous convient.
Il s'agit d'une sorte de concavité locale d'une fonction détectable par la dérivée seconde.

Définition. Soit $p \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$p \text{ strictement concave sur } U \;:\Longleftrightarrow\; D^2 p \prec 0 \text{ sur } U \;\Longleftrightarrow\; \forall x \in U \colon \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \colon D^2 p(x)[v,v] < 0$$

Concavité

La terminologie suivante n'est pas standard mais nous convient.
Il s'agit d'une sorte de concavité locale d'une fonction détectable par la dérivée seconde.

Définition. Soit $p \in \mathbb{R}[\bar{X}]$ et $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$p \text{ strictement concave sur } U \;:\Longleftrightarrow\; D^2 p \prec 0 \text{ sur } U \;\Longleftrightarrow\; \forall x \in U\colon \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\colon D^2 p(x)[v,v] < 0$$

$$p \text{ strictement quasi-concave sur } U \;:\Longleftrightarrow\; \forall x \in U\colon \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\colon (Dp(x)[v] = 0 \implies D^2 p(x)[v,v] < 0)$$

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact, convexe de de l'intérieur non-vide.}}$

Lemme (Helton & Nie 2008). Si tout g_i est strictement concave sur S, alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact, convexe de de l'intérieur non-vide.}}$

Lemme (Helton & Nie 2008). Si tout g_i est strictement concave sur S, alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$.

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact, convexe de de l'intérieur non-vide.}}$

Lemme (Helton & Nie 2008). Si tout g_i est strictement concave sur S, alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$. À montrer: $f \in T_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$ qui ne dépend pas de f.

Supposons que S soit compact, convexe de de l'intérieur non-vide.

Lemme (Helton & Nie 2008). Si tout g_i est strictement concave sur S, alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$. À montrer: $f \in T_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$ qui ne dépend pas de f. Comme la condition de Slater est verifiée, nous obtenons des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i \geq 0$,
$i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, tel que $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$.

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact, convexe de de l'intérieur non-vide.}}$

Lemme (Helton & Nie 2008). Si tout g_i est strictement concave sur S, alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$. À montrer: $f \in T_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$ qui ne dépend pas de f. Comme la condition de Slater est verifiée, nous obtenons des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i \geq 0$,
$i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, tel que $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$.
Or nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) = \int_0^1 \int_0^t D^2(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u + s(x-u))[x-u, x-u]\, ds\, dt$$

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact, convexe de de l'intérieur non-vide.}}$

Lemme (Helton & Nie 2008). Si tout g_i est strictement concave sur S, alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$. À montrer: $f \in T_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$ qui ne dépend pas de f. Comme la condition de Slater est verifiée, nous obtenons des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i \geq 0$, $i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, tel que $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$. Or nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) = \int_0^1 \int_0^t D^2(-\sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u + s(x-u))[x-u, x-u] \, ds \, dt$$

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact, convexe de de l'intérieur non-vide.}}$

Lemme (Helton & Nie 2008). Si tout g_i est strictement concave sur S, alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$. À montrer: $f \in T_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$ qui ne dépend pas de f. Comme la condition de Slater est verifiée, nous obtenons des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i \geq 0$, $i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, tel que $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$.
Or nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i \int_0^1 \int_0^t -D^2 g_i(u + s(x-u))[x-u, x-u] ds\, dt$$

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact, convexe de de l'intérieur non-vide.}}$

Lemme (Helton & Nie 2008). Si tout g_i est strictement concave sur S, alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$. À montrer: $f \in T_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$ qui ne dépend pas de f. Comme la condition de Slater est verifiée, nous obtenons des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i \geq 0$, $i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, tel que $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$. Or nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i \Big(\int_0^1 \int_0^t -D^2 g_i(u + s(x-u))\, ds\, dt \Big)[x-u, x-u]$$

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact, convexe de de l'intérieur non-vide.}}$

Lemme (Helton & Nie 2008). Si tout g_i est strictement concave sur S, alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$. À montrer: $f \in T_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$ qui ne dépend pas de f. Comme la condition de Slater est verifiée, nous obtenons des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i \geq 0$,
$i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, tel que $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$.
Or nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i \Big(\underbrace{\int_0^1 \int_0^t -D^2 g_i(u + s(x-u)) ds\ dt}_{=:F_{i,u}(x)} \Big) [x-u, x-u]$$

$F_{i,u} \in S\mathbb{R}[X]^{n \times n}$, $F_{i,u} \succ 0$ sur S, use Hol & Scherer with bounds!

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact, convexe de de l'intérieur non-vide.}}$

Lemme (Helton & Nie 2008). Si tout g_i est strictement concave sur S, alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$. À montrer: $f \in T_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$ qui ne dépend pas de f. Comme la condition de Slater est verifiée, nous obtenons des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i \geq 0$,
$i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, tel que $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$.
Or nous avons

$$f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i = \sum_{i \in I} \lambda_i (\bar{X} - u)^T F_{i,u} \, (\bar{X} - u)$$

$F_{i,u} \in S\mathbb{R}[X]^{n \times n}$, $F_{i,u} \succ 0$ sur S, use Hol & Scherer with bounds!

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact, convexe de de l'intérieur non-vide.}}$

Lemme (Helton & Nie 2008). Si tout g_i est strictement concave sur S, alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$. À montrer: $f \in T_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$ qui ne dépend pas de f. Comme la condition de Slater est verifiée, nous obtenons des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i \geq 0$, $i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, tel que $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$.
Or nous avons

$$f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i = \sum_{i \in I} \lambda_i (\bar{X} - u)^T \Big(\sum_{\delta \in \{0,1\}^m} P_{i,u,\delta} P_{i,u,\delta}^T g^\delta \Big) (\bar{X} - u)$$

$F_{i,u} \in S\mathbb{R}[X]^{n \times n}$, $F_{i,u} \succ 0$ sur S, use Hol & Scherer with bounds!

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact, convexe de de l'intérieur non-vide.}}$

Lemme (Helton & Nie 2008). Si tout g_i est strictement concave sur S, alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$. À montrer: $f \in T_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$ qui ne dépend pas de f. Comme la condition de Slater est verifiée, nous obtenons des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i \geq 0$,
$i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, tel que $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$.
Or nous avons

$$f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i = \sum_{i \in I} \lambda_i \sum_{\delta \in \{0,1\}^m} (P_{i,u,\delta}^T(\bar{X} - u))^T (P_{i,u,\delta}^T(\bar{X} - u)) g^\delta$$

$F_{i,u} \in S\mathbb{R}[X]^{n \times n}$, $F_{i,u} \succ 0$ sur S, use Hol & Scherer with bounds!

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact, convexe de de l'intérieur non-vide.}}$

Lemme (Helton & Nie 2008). Si tout g_i est strictement concave sur S, alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration. Soit $u \in \partial S$ et $f \in \mathbb{R}[\bar{X}]_1 \setminus \{0\}$ tel que $f \geq 0$ sur S et $f(u) = 0$. À montrer: $f \in T_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$ qui ne dépend pas de f. Comme la condition de Slater est verifiée, nous obtenons des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i \geq 0$,
$i \in I := \{i \mid g_i(u) = 0\}$, tel que $D(f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i)(u) = 0$.
Or nous avons

$$f - \sum_{i \in I} \lambda_i g_i = \sum_{i \in I} \lambda_i \sum_{\delta \in \{0,1\}^m} (P^T_{i,u,\delta}(\bar{X} - u))^T (P^T_{i,u,\delta}(\bar{X} - u)) g^\delta$$

$F_{i,u} \in S\mathbb{R}[X]^{n \times n}$, $F_{i,u} \succ 0$ sur S, use Hol & Scherer with bounds!

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact, convexe et de interieur non-vide.}}$

Théorème (Helton & Nie 2008). Si tout g_i est strictement quasi-concave sur S, alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

Dans la démonstration, on se ramène de façon assez brute à la démonstration du lemme.

$\boxed{\text{Supposons que } S \text{ soit compact, convexe et de interieur non-vide.}}$

Théorème (Helton & Nie 2008). Si tout g_i est strictement quasi-concave sur S, alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

Dans la démonstration, on se ramène de façon assez brute à la démonstration du lemme.

Théorème (Helton & Nie 2008). Si tout g_i est strictement quasi-concave sur $\partial S \cap \{g_i = 0\}$, g_i ne s'annule nulle part dans l'intérieur de S et la dérivée de g_i ne s'annule nulle part dans $\partial S \cap \{g_i = 0\}$, alors $S = S'_k$ pour un $k \in \mathbb{N}$.

La preuve originale est une réduction extrêmement dur au théorème précédant. Approche beaucoup plus simple semble possible.

Un convexe semialgébrique, est-il toujours un projeté IML?

Définition. Un semialgébrique dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble défini par une formule formée par la combinaison d'inégalités polynomiales avec "et", "ou" et "ne pas".

Un convexe semialgébrique, est-il toujours un projeté IML?

Définition. Un semialgébrique dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble défini par une formule formée par la combinaison d'inégalités polynomiales avec "et", "ou" et "ne pas".

Élimination de quantificateurs dans les réels (Tarski 1951).
Dans la définition précédente, on peut de façon équivalente admettre en plus l'utilisation de "pour tout x réel" et "il existe x réel".

Un convexe semialgébrique, est-il toujours un projeté IML?

Définition. Un semialgébrique dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble défini par une formule formée par la combinaison d'inégalités polynomiales avec "et", "ou" et "ne pas".

Élimination de quantificateurs dans les réels (Tarski 1951).
Dans la définition précédente, on peut de façon équivalente admettre en plus l'utilisation de "pour tout x réel" et "il existe x réel".

Définition. Nous appelons $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un projeté IML s'il existe $t \in \mathbb{N}$ et $A_i, B_i \in S\mathbb{R}^{t\times t}$ tel que
$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^m \colon A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i + \sum_{i=1}^m y_i B_i \succeq 0\}$

Un convexe semialgébrique, est-il toujours un projeté IML?

Définition. Un semialgébrique dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble défini par une formule formée par la combinaison d'inégalités polynomiales avec "et", "ou" et "ne pas".

Élimination de quantificateurs dans les réels (Tarski 1951).
Dans la définition précédente, on peut de façon équivalente admettre en plus l'utilisation de "pour tout x réel" et "il existe x réel".

Définition. Nous appelons $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un projeté IML s'il existe $t \in \mathbb{N}$ et $A_i, B_i \in S\mathbb{R}^{t\times t}$ tel que
$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^m \colon A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i + \sum_{i=1}^m y_i B_i \succeq 0\}$

Exemple. $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \colon \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \succeq 0\}$ est un projeté IML.

Un convexe semialgébrique, est-il toujours un projeté IML?

Définition. Un semialgébrique dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble défini par une formule formée par la combinaison d'inégalités polynomiales avec "et", "ou" et "ne pas".

Élimination de quantificateurs dans les réels (Tarski 1951).
Dans la définition précédente, on peut de façon équivalente admettre en plus l'utilisation de "pour tout x réel" et "il existe x réel".

Définition. Nous appelons $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un projeté IML s'il existe $t \in \mathbb{N}$ et $A_i, B_i \in S\mathbb{R}^{t \times t}$ tel que
$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^m \colon A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i + \sum_{i=1}^m y_i B_i \succeq 0\}$

Exemple. $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \colon \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{smallmatrix}\right) \succeq 0\}$ est un projeté IML.

Remarque. Tout S'_k est un projeté IML.

Un convexe semialgébrique, est-il toujours un projeté IML?

Définition. Un semialgébrique dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble défini par une formule formée par la combinaison d'inégalités polynomiales avec "et", "ou" et "ne pas".

Élimination de quantificateurs dans les réels (Tarski 1951).
Dans la définition précédente, on peut de façon équivalente admettre en plus l'utilisation de "pour tout x réel" et "il existe x réel".

Définition. Nous appelons $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un projeté IML s'il existe $t \in \mathbb{N}$ et $A_i, B_i \in S\mathbb{R}^{t\times t}$ tel que
$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^m \colon A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i + \sum_{i=1}^m y_i B_i \succeq 0\}$

Exemple. $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \colon \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{smallmatrix}\right) \succeq 0\}$ est un projeté IML.

Remarque. Tout S_k' est un projeté IML.

Remarque. Tout projeté IML est (bien sûr) convexe et (par l'élimination de quantificateurs) semialgébrique.

Un convexe semialgébrique, est-il toujours un projeté IML?

Lemme (Helton & Nie). Si $U_1, \ldots, U_\ell \subseteq \mathbb{R}^n$ sont des projetés IML bornés non-vides, alors $\operatorname{conv} \bigcup_{i=1}^{\ell} U_i$ est un projeté IML.

Un convexe semialgébrique, est-il toujours un projeté IML?

Lemme (Helton & Nie). Si $U_1, \ldots, U_\ell \subseteq \mathbb{R}^n$ sont des projetés IML bornés non-vides, alors $\operatorname{conv} \bigcup_{i=1}^{\ell} U_i$ est un projeté IML.

Théorème (Helton & Nie). Soient S compact, chaque g_i strictement quasi-concave sur $S \cap (\partial \operatorname{conv} S) \cap \{g_i = 0\}$ et $S \cap \partial \operatorname{conv} S$ contenu dans la clôture de l'intérieur de S. Alors $\operatorname{conv} S$ est un projeté IML.

Un convexe semialgébrique, est-il toujours un projeté IML?

Lemme (Helton & Nie). Si $U_1, \ldots, U_\ell \subseteq \mathbb{R}^n$ sont des projetés IML bornés non-vides, alors $\operatorname{conv} \bigcup_{i=1}^{\ell} U_i$ est un projeté IML.

Théorème (Helton & Nie). Soient S compact, chaque g_i strictement quasi-concave sur $S \cap (\partial \operatorname{conv} S) \cap \{g_i = 0\}$ et $S \cap \partial \operatorname{conv} S$ contenu dans la clôture de l'intérieur de S. Alors $\operatorname{conv} S$ est un projeté IML.

Démonstration. Utiliser le lemme et le premier théorème de Helton & Nie.

Un convexe semialgébrique, est-il toujours un projeté IML?

Lemme (Helton & Nie). Si $U_1, \ldots, U_\ell \subseteq \mathbb{R}^n$ sont des projetés IML bornés non-vides, alors $\operatorname{conv} \bigcup_{i=1}^{\ell} U_i$ est un projeté IML.

Théorème (Helton & Nie). Soient S compact, chaque g_i strictement quasi-concave sur $S \cap (\partial \operatorname{conv} S) \cap \{g_i = 0\}$ et $S \cap \partial \operatorname{conv} S$ contenu dans la clôture de l'intérieur de S. Alors $\operatorname{conv} S$ est un projeté IML.

Démonstration. Utiliser le lemme et le premier théorème de Helton & Nie.

Au congrès international de mathématiques à Madrid en 2006, Arkadii Nemirovskii a demandé si tout convexe semialgébrique est un projeté IML: "Cette question semble être entièrement ouverte."

Literature

Helton & Nie: Sufficient and necessary conditions for semidefinite representability of convex hulls and sets

http://arxiv.org/abs/0709.4017

Helton & Nie: Semidefinite representation of convex sets

http://arxiv.org/abs/0705.4068

Lasserre: Convex sets with semidefinite representation
to appear in Math. Prog.

http://dx.doi.org/10.1007/s10107-008-0222-0

Literature

avec Nie: On the complexity of Putinar's Positivstellensatz
J. Complexity 23, no. 1 (2007), 135—150
http://dx.doi.org/10.1007/10.1016/j.jco.2006.07.002

Hol & Scherer: Matrix sum-of-squares relaxations for robust semi-definite programs,
Math. Prog. 107, no. 1-2 (2006), 189–211
http://dx.doi.org/10.1007/s10107-005-0684-2

An algorithmic approach to Schmüdgen's Positivstellensatz
J. Pure Appl. Algebra 166 (2002), 307—319
http://dx.doi.org/10.1016/S0022-4049(01)00041-X

On the complexity of Schmüdgen's Positivstellensatz
J. Complexity 20, no. 4 (2004), 529–543
http://dx.doi.org/10.1016/j.jco.2004.01.005

Optimization of polynomials on compact semialgebraic sets
SIAM J. Opt. 15, no. 3 (2005), 805–825
http://dx.doi.org/10.1137/s1052623403431779