Universität Konstanz Alexander Taveira Blomenhofer
Fachbereich Mathematik und Statistik Markus Schweighofer
Sommersemester 2020

Übungsblatt 10 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. Seien R ein kommutativer Ring, M ein R-Modul, $a_1, \dots, a_n \in R$ und $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $a_1, \dots, a_n$ bilden eine Nichtnullteilerfolge für M.

(b) $a_1^{k_1}, \dots, a_n^{k_n}$ bilden eine Nichtnullteilerfolge für M.

Hinweis: Behandle zunächst den Fall $n = 1$. Sei nun $n > 2$. Argumentiere, warum es genügt, den Fall $k_2 = \ldots = k_n = 1$ zu behandeln. Für (a) $\Longrightarrow$ (b) betrachte die Kette

$$M/a_1^{k_1}M \supseteq a_1M/a_1^{k_1}M \supseteq a_1^2M/a_1^{k_1}M \supseteq \ldots \supseteq a_1^{k_1-1}M/a_1^{k_1}M \supseteq a_1^{k_1}M/a_1^{k_1}M = 0$$

von Untermoduln von $M/a_1^{k_1}M$ und benutze Aufgabe 4 auf dem letzten Blatt. Für (b) $\Longrightarrow$ (a) wende Aufgabe 3 auf dem letzten Blatt auf $a_1^{k_1}, a_2, \dots, a_n$ an.

Aufgabe 2. Ein *affiner Unterraum* eines K-Vektorraums V ist eine Teilmenge A von V mit der Eigenschaft $\lambda v + (1 - \lambda)w \in A$ für alle $\lambda \in K$ und $v, w \in A$. Zeige: Ein Vektorraum V über einem Körper mit mindestens $n + 1$ Elementen ($n \in \mathbb{N}_0$) ist niemals Vereinigung von n affinen Unterräumen $\neq V$. Insbesondere ist ein Vektorraum über einem unendlichen Körper niemals eine Vereinigung von endlich vielen affinen Unterräumen $\neq V$.

Aufgabe 3. Argumentiere, warum man Lemma 4.2.10 dahingehend verschärfen kann, dass $a_1, \dots, a_n$ auch eine Nichtnullteilerfolge für M bleibt, nachdem man a_0 *irgendwo* in dieser Folge einreiht (und nicht unbedingt am Anfang, wie es dort war).

Aufgabe 4. Sei R ein kommutativer noetherscher Ring, K ein unendlicher Unterkörper von R, M ein endlich erzeugter R-Modul, $a_1, ..., a_n$ eine Nichtnullteilerfolge für M und bezeichne $a \in R^n$ den daraus entstehenden Spaltenvektor. Zeige, dass es dann eine untere Dreiecksmatrix $C \in K^{n \times n}$ mit lauter Einsen auf der Diagonalen gibt derart, dass die Einträge von Ca *in jeder beliebigen Reihenfolge* eine Nichtnullteilerfolge für M bilden.

Hinweis: Als Übung ist es gut, sich zunächst den Fall $n = 2$ anzuschauen. Falls man nichts besseres hinbekommt, kann man auch damit bereits seinen Reputationsverlust begrenzen. Ansonsten überlege man sich, dass man per Induktion davon ausgehen kann, dass $n \geq 2$ und $a_1, \dots, a_{n-1}$ *in jeder beliebigen Reihenfolge* eine Nichtnullteilerfolge für M bilden. Benutze dann 2.2.5 und Aufgabe 3 in Verbindung mit der Tatsache, dass ein endlich erzeugter Modul über einem kommutativen noetherschen Ring stets nur endlich viele assoziierte Primideale hat, um zu zeigen, dass man sogar eine Matrix C mit den gewünschten Eigenschaften finden kann, die ausserhalb der Diagonalen und der letzten Zeile nur Nulleinträge besitzt.

Abgabe bis Freitag, den 3. Juli, um 11:44 Uhr in die digitalen Briefkästen.