Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Alexander Taveira Blomenhofer
Markus Schweighofer

Übungsblatt 9 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. Sei K ein Körper und betrachte das maximale Ideal $\mathfrak{m} := (X, Y, Z)$ des Polynomrings $R := K[X, Y, Z]$. Bezeichne M den R-Modul R und $M_\mathfrak{m}$ seine Lokalisierung nach $\mathfrak{m}$. Bilden

(a) $\frac{X}{1}, \frac{Y(1-X)}{1}, \frac{Z(1-X)}{1}$

(b) $\frac{Y(1-X)}{1}, \frac{Z(1-X)}{1}, \frac{X}{1}$

eine Nichtnullteilerfolge für $M_\mathfrak{m}$?

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $R := K[X, Y, \underline{Z}]$ wieder der Polynomring in abzählbar vielen Unbestimmten $X, Y, Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ über K. Betrachte das maximale Ideal $\mathfrak{m} := (X, Y, Z_1, Z_2, Z_3, \ldots)$ von R und wieder das Ideal I von R, welches von allen YZ_i und $Z_i - XZ_{i+1}$ mit $i \in \mathbb{N}$ erzeugt ist. Betrachte wieder den R-Modul $M := R/I$ und dessen Lokalisierung $M_\mathfrak{m}$ nach $\mathfrak{m}$. Bilden

(a) $\frac{X}{1}, \frac{Y}{1}$

(b) $\frac{Y}{1}, \frac{X}{1}$

eine Nichtnullteilerfolge für $M_\mathfrak{m}$?

Aufgabe 3. Sei R ein kommutativer Ring, M ein R-Modul. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$, alle Nichtnullteilerfolgen $a_1, \ldots, a_n$ für M und alle $x_1, \ldots, x_n \in M$ mit $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ stets

$$x_i \in a_1 M + \ldots + a_n M$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt.

Aufgabe 4. Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$, $M_0, \ldots, M_k$ Untermoduln von M mit

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_k = 0$$

und $a_1, \ldots, a_n \in R$, derart, dass $a_1, \ldots, a_n$ eine Nichtnullteilerfolge für jeden der R-Moduln

$$M_i / M_{i+1} \qquad (i \in \{0, \ldots, k-1\}).$$

bilden. Zeige, dass dann $a_1, \ldots, a_n$ eine Nichtnullteilerfolge für M bilden.

Abgabe bis Freitag, den 26. Juni, um 11:44 Uhr in die digitalen Briefkästen.