Universität Konstanz Alexander Taveira Blomenhofer
Fachbereich Mathematik und Statistik Markus Schweighofer
Sommersemester 2020

Übungsblatt 8 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. Sei K ein Körper und $R := K[X, Y, Z]$ der Polynomring in drei Unbestimmten X, Y, Z über K. Bezeichne M den R-Modul R. Bilden

(a) $X, Y(1-X), Z(1-X)$

(b) $Y(1-X), Z(1-X), X$

eine Nichtnullteilerfolge für M?

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und

$$R := K[X, Y, \underline{Z}] := K[X, Y, Z_1, Z_2, Z_3, \ldots]$$

der Polynomring in abzählbar vielen Unbestimmten $X, Y, Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ über K. Betrachte das Ideal

$$I := (\{YZ_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{Z_i - XZ_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}) \subseteq R$$

von R, welches von allen YZ_i und $Z_i - XZ_{i+1}$ mit $i \in \mathbb{N}$ erzeugt ist. Betrachte den R-Modul

$$M := R/I.$$

Bilden

(a) X, Y

(b) Y, X

eine Nichtnullteilerfolge für M?

Hinweis: Betrachte den Ringendomorphismus $\varphi\colon K[X, Y, \underline{Z}] \to K[X, Y, \underline{Z}]$ mit

$$\varphi|_K = \mathrm{id}_K, \quad \varphi(X) = X, \quad \varphi(Y) = Y \quad \text{und} \quad \varphi(Z_i) = Z_{i+1} \text{ für } i \in \mathbb{N}.$$

Zeige $\varphi(I) \subseteq I$. Bezeichne $\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ die Menge aller Abbildungen $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ mit endlichem Träger $\{i \in \mathbb{N} \mid \alpha(i) \neq 0\}$. Schreibe $|\alpha| := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i)$ und $\underline{Z}^\alpha := \prod_{i \in \mathbb{N}} Z_i^{\alpha(i)}$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$. Ist $f \in K[X, Y, \underline{Z}]$ und $d \in \mathbb{N}_0$, so nennen wir f d-homogen in $\underline{Z}$, wenn jedes Monom von f von der Form $X^i Y^j \underline{Z}^\alpha$ ist für gewisse $i, j \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ mit $|\alpha| = d$. Zeige nun zunächst als Hilfsbehauptung, dass für alle $d \in \mathbb{N}_0$ und alle $\underline{Z}$

d*-homogenen* $f \in K[X, Y, \underline{Z}]$ mit $Xf \in I$ sogar $f \in I$ gilt. Wende dazu φ an und multipliziere mit X^{d-1} ausser für $d = 0$. Dehne nun die Hilfsbehauptung auf alle beliebigen $f \in K[X, Y, \underline{Z}]$ aus. Was hat die Hilfsbehauptung mit der Aufgabenstellung zu tun?

Aufgabe 3. Sei R ein kommutativer Ring und $0 \to L \to M \to N \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Sei $a_1, \ldots, a_n$ eine Nichtnullteilerfolge sowohl für L als auch für N. Zeige, dass $a_1, \ldots, a_n$ dann auch eine Nichtnullteilerfolge für M bildet.

Hinweis: Zeige, dass die gegebene exakte Sequenz im Fall $n \geq 1$ eine exakte Sequenz $0 \to L/a_1L \to M/a_1M \to N/a_1N \to 0$ induziert.

Abgabe bis Freitag, den 19. Juni, um 11:44 Uhr in die digitalen Briefkästen.