Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Alexander Taveira Blomenhofer
Markus Schweighofer

Übungsblatt 7 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. Sei K ein Körper. Zeige, dass in $K[X,Y]$ das Ideal (X^2, Y^2) weder ein Produkt noch ein Schnitt von Primidealen ist.

Aufgabe 2. Sei R ein kommutativer noetherscher Ring und $\mathfrak{q}$ ein Ideal von R. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $\mathfrak{q}$ ist primär.

(b) $1 \notin \mathfrak{q}$ und für alle Ideale I und J von R mit $IJ \subseteq \mathfrak{q}$ gilt $I \subseteq \mathfrak{q}$ oder $J \subseteq \sqrt{\mathfrak{q}}$.

(c) $1 \notin \mathfrak{q}$ und für alle Ideale I und J von R mit $I \cap J \subseteq \mathfrak{q}$ gilt $I \subseteq \mathfrak{q}$ oder $J \subseteq \sqrt{\mathfrak{q}}$.

Aufgabe 3. Sei R ein kommutativer noetherscher Ring, I ein Ideal von R und

$$J := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I^k.$$

Zeige, dass

(a) $IJ = J$ gilt mit Hilfe von Aufgabe 1 und einer Primärzerlegung von IJ,

(b) $J = (0)$ genau dann gilt, wenn $1 + a$ für kein $a \in I$ ein Nullteiler von R ist.

Zeige dass die Bedingung

$$J = (0) \iff 1 \notin I$$

erfüllt ist, wenn

(c) R ein Integritätsbereich,

(d) R lokal

ist, aber dass

(e) diese Bedingung nicht für alle R, I und J wie oben erfüllt ist.

Aufgabe 4.

(a) Finde eine unverkürzbare Primärzerlegung des Ideals (X^2, XY) im Ring $\mathbb{C}[X,Y]$.

(b) Ist diese bis auf Reihenfolge eindeutig?

Abgabe bis Freitag, den 12. Juni, um 11:44 Uhr in die digitalen Briefkästen.