Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2020

Alexander Taveira Blomenhofer
Markus Schweighofer

Übungsblatt 4 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. Sei R ein kommutativer Ring, M ein R-Modul, $\mathfrak{p} \in \operatorname{supp} M$ und $\mathfrak{q} \in \operatorname{spec} R$ mit $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$. Zeige $\mathfrak{q} \in \operatorname{supp} M$.

Aufgabe 2. Bestimme für den $\mathbb{C}[X,Y]$-Modul $M := \mathbb{C}[X,Y]/(X^2, XY)$ möglichst explizit

(a) $\operatorname{ass}(M)$,

(b) $\operatorname{supp}(M)$.

Aufgabe 3. Ein Modul heißt *endlich präsentierbar*, wenn er isomorph ist zu einem Quotienten eines freien Moduls von endlichem Rang modulo einem e.e. Untermodul. Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind:

(a) M ist isomorph ist zu einem Quotienten eines freien Moduls von endlichem Rang modulo einem e.e. Untermodul.

(b) Es gibt eine exakte Sequenz der Form $R^n \to R^m \to M \to 0$ mit $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 4. Zeige, dass e.e. Moduln über einem noetherschen Ring stets endlich präsentierbar sind.

Aufgabe 5. Für alle R-Moduln M, N, P und Homomorphismen $f\colon M \to N$ betrachten wir den R-Modulhomomorphismus

$$\operatorname{Hom}(f,P)\colon \operatorname{Hom}(N,P) \to \operatorname{Hom}(M,P),\ g \mapsto g \circ f.$$

Sei P ein R-Modul. Zeige:

(a) $\operatorname{Hom}(\mathrm{id}_M, P) = \mathrm{id}_{\operatorname{Hom}(M,P)}$ für alle R-Moduln M und P,

(b) $\operatorname{Hom}(g \circ f, P) = \operatorname{Hom}(f,P) \circ \operatorname{Hom}(g,P)$ für jede Sequenz $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ von R-Moduln und jeden R-Modul P,

(c) $\operatorname{Hom}(\,\cdot\,, P)$ führt kommutierende Diagramme von R-Modulhomorphismen stets in entsprechende kommutierende Diagramme mit umgekehrter Pfeilrichtung über.

(d) Ist $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von R-Moduln, so ist

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(N,P) \xrightarrow{\operatorname{Hom}(g,P)} \operatorname{Hom}(M,P) \xrightarrow{\operatorname{Hom}(f,P)} \operatorname{Hom}(L,P)$$

ebenfalls exakt.

Abgabe bis Freitag, den 22. Mai, um 11:44 Uhr in die digitalen Briefkästen.