Universität Konstanz Alexander Taveira Blomenhofer
Fachbereich Mathematik und Statistik Markus Schweighofer
Sommersemester 2020

Übungsblatt 2 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1.

(a) Zeige mit Hilfe des Nakayama-Lemmas: Ist A ein kommutativer Ring und I ein e.e. Ideal von A mit $I = I^2$, dann gibt es $a \in A$ mit $a^2 = a$ und $I = (a)$.

(b) Zeige, dass die Aussage aus (a) nicht mehr gilt, wenn man auf die Voraussetzung „e.e." verzichtet.

Aufgabe 2. Sei M ein R-Modul. Seien S und T multiplikative Teilmengen von M mit $S \subseteq T$. Zeige, dass eine kanonische Isomorphie

$$\iota_0(T)^{-1}(S^{-1}R) \cong T^{-1}R$$

von Ringen besteht, wobei $\iota_0 : R \to S^{-1}R$ den kanonischen Homomorphismus bezeichne. Zeige, dass auch eine kanonische Isomorphie

$$\iota_0(T)^{-1}(S^{-1}M) \cong T^{-1}M$$

von $T^{-1}R$-Moduln besteht, wobei $\iota_0(T)^{-1}(S^{-1}M)$ vermöge des obigen Isomorphismus als $T^{-1}R$-Modul aufgefasst wird.

Hinweis: Man kann die Charakterisierungen der Lokalisierungen 1.2.4 und 1.2.8(a) aus der Vorlesung benutzen.

Aufgabe 3. Sei R ein kommutativer Ring, $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} R$ und $S \subseteq R$ multiplikativ mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$.

(a) Zeige, dass man einen Ringisomorphismus

$$\psi\colon R_{\mathfrak{p}} \to (S^{-1}R)_{S^{-1}\mathfrak{p}},\ \frac{a}{b} \mapsto \frac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{1}} \quad (a \in R, b \in R \setminus \mathfrak{p})$$

hat.

(b) Sei nun weiter M ein R-Modul und man fasse den $(S^{-1}R)_{S^{-1}\mathfrak{p}}$-Modul $(S^{-1}M)_{S^{-1}\mathfrak{p}}$ vermöge ψ als $R_{\mathfrak{p}}$-Modul auf. Zeige, dass man dann einen $R_{\mathfrak{p}}$-Modulisomorphismus

$$M_{\mathfrak{p}} \to (S^{-1}M)_{S^{-1}\mathfrak{p}},\ \frac{x}{b} \mapsto \frac{\frac{x}{1}}{\frac{b}{1}} \quad (x \in M, b \in R \setminus \mathfrak{p})$$

hat.

Abgabe bis Freitag, den 8. Mai, um 11:44 Uhr in die digitalen Briefkästen.