
Übungsblatt 8 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. Zeige:

- (a) $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ist nicht faktoriell.
- (b) Der quadratische Zahlring \mathcal{O}_{-3} ist euklidisch.

Aufgabe 2. Sei $p \in \mathbb{P}$ mit $p \equiv_{(3)} 1$. Zeige:

- (a) Für $m := \frac{p-1}{3} \in \mathbb{N}$ ist jedes Element von $\{x^3 \mid x \in \mathbb{F}_p^\times\}$ eine Nullstelle des Polynoms $X^m - 1 \in \mathbb{F}_p[X]$.
- (b) Es gibt $x, y \in \mathbb{F}_p^\times$ mit $x \neq y$ und $x^3 = y^3$.
- (c) Das Polynom $X^3 - 1$ zerfällt in $\mathbb{F}_p[X]$ in Linearfaktoren.
- (d) Das Polynom $X^3 - 1$ zerfällt in $\mathcal{O}_{-3}[X]$ in Linearfaktoren.
- (e) p ist nicht prim im quadratischen Zahlring \mathcal{O}_{-3} .
- (f) p ist im Ring \mathcal{O}_{-3} reduzibel.
- (g) Zeige, dass für jedes $z \in \mathcal{O}_{-3}$ gilt $\left\{ \frac{1+\sqrt{-3}}{2}z, z, \frac{1-\sqrt{-3}}{2}z \right\} \cap \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \neq \emptyset$.
- (h) Es gibt $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $p = a^2 + 3b^2$.

Hinweis: Zeige $p = |z|^2$ für ein $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$. Nutze dazu (g) und $\left| \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \right| = 1$.

Aufgabe 3. Zeige, dass der Oberring $\mathbb{Z} \left[\frac{1+\sqrt{-5}}{2} \right]$ von $\mathcal{O}_{-5} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ faktoriell ist.

Abgabe bis Mittwoch, den 12. Juni 2019, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.