Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2019

Alexander Taveira Blomenhofer
Markus Schweighofer

Übungsblatt 5 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. Bestimme die Länge der folgenden Moduln:

(a) $120\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul

(b) $\mathbb{Z}/120\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul

(c) $\mathbb{C}[X]/(X^{100}+X+1)\mathbb{C}[X]$ als $\mathbb{C}[X]$-Modul

(d) $\mathbb{R}[X]/(X^4+2X^2+1)\mathbb{R}[X]$ als $\mathbb{R}[X]$-Modul

(e) $\mathbb{Z}[X]/(X^4+2X^2+1)\mathbb{Z}[X]$ als $\mathbb{Z}[X]$-Modul

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und betrachte den Ring $R := K[X]/(X^2)$.

(a) Ist R als R-Modul halbeinfach?

(b) Ist R als R-Modul einfach?

(c) Ist R als R-Modul unzerlegbar?

(d) Bestimme eine Kompositionsreihe des R-Moduls R.

(e) Bestimme die Länge von R als R-Modul.

(f) Finde einen zum R-Modul R nicht isomorphen R-Modul M mit $\ell(R) = \ell(M)$ so, dass alle Kompositionsreihen von R und von M bis auf Isomorphie und Reihenfolge dieselben Faktoren besitzen.

Aufgabe 3. Sei M ein noetherscher Modul und $f \in \operatorname{End}(M)$ surjektiv. Zeige, dass f ein Automorphismus von M ist.

Hinweis: Betrachte die Fitting-Zerlegung einer geeigneten Potenz von f.

Abgabe bis Mittwoch, den 22. Mai 2019, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.