Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2019

Alexander Taveira Blomenhofer
Markus Schweighofer

Klausur zur Polynomialen Optimierung

Aufgabe 1 (10 Punkte). Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ der reellen Polynome in *einer* Variablen X und für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ den linearen Unterraum

$$\mathbb{R}[X]_k = \{p \in \mathbb{R}[X] \mid \deg p \leq k\}.$$

(a) Zeige, dass für alle $d \in \mathbb{N}$ und jede lineare Funktion $L\colon \mathbb{R}[X]_{2d} \to \mathbb{R}$ mit

$$L\left(\sum \mathbb{R}[X]_d^2\right) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$$

die Einschränkung $L|_{\mathbb{R}[X]_{2d-1}}$ auf $\mathbb{R}[X]_{2d-1}$ eine Quadraturformel besitzt.

Hinweis: Benutze die trunkierte GNS-Konstruktion.

(b) Zeige, dass es eine lineare Funktion $L\colon \mathbb{R}[X]_2 \to \mathbb{R}$ mit

$$L\left(\sum \mathbb{R}[X]_1^2\right) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0},$$

gibt, die keine Quadraturformel besitzt.

Hinweis: Betrachte $L \in \mathbb{R}[X]_2^*$ mit $L(1) = 0$.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Seien $k \in \mathbb{N}_0$ und sei R eine Relation auf $\{1, \ldots, k\}$. Betrachte die Menge S aller Matrizen $x = (x_{is})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq s \leq k}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{k \times k}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Alle Zeilensummen der Matrix x sind gleich 1.

(2) Alle Spaltensummen der Matrix x sind gleich 1.

(3) $\forall (i,j) \in R : \forall s \in \{1, \ldots, k\} : \sum_{u=1}^{s-1} x_{iu} \geq \sum_{u=1}^{s} x_{ju}$

Zeige, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

(a) $S \neq \emptyset$

(b) Es gibt eine Abbildung $c\colon \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$ mit

$$(*) \qquad \forall (i,j) \in R : c(i) < c(j).$$

(c) Es gibt eine bijektive Abbildung $\tau\colon \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$ mit

$$(**) \qquad \forall (i,j) \in R : \tau(i) < \tau(j).$$

Aufgabe 3 (10 Punkte). Betrachte den Polynomring $\mathbb{R}[X,Y]$ in zwei Variablen X und Y und den Spaltenvektor

$$u := \begin{pmatrix} 1 & X & Y & X^2 & XY & Y^2 & X^3 & X^2Y & XY^2 & Y^3 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}[X,Y]_3^{10},$$

dessen Einträge den Vektorraum $\mathbb{R}[X,Y]_3$ der Polynome vom Grad ≤ 3 aufspannen. Betrachte das Polynom

$$f := 1 + X^2 + Y^2 + X^4 + X^2Y^2 + Y^4 + X^6 + X^4Y^2 + X^2Y^4 + Y^6 \in \mathbb{R}[X,Y]_6.$$

(a) Finde eine positiv semidefinite Matrix $G \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ mit $f = u^T G u$.

(b) Zeige, dass f eine Einheit für den Kegel $\sum \mathbb{R}[X,Y]_3^2$ im Vektorraum $\mathbb{R}[X,Y]_6$ ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Betrachte das polynomiale Optimierungsproblem

$$(P) \qquad \text{minimiere } x^2 \text{ über } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x - 1 \geq 0$$

und seine Momentenrelaxierungen (P_2) vom Grad 2 und (P_3) vom Grad 3 (also die „ersten beiden" Momentenrelaxierungen).

(a) Schreibe (P_2) explizit als SDP.

(b) Schreibe (P_3) explizit als SDP.

(c) Bestimme den Optimalwert P^* von (P).

(d) Bestimme den Optimalwert P_2^* von (P_2).

(e) Bestimme den Optimalwert P_3^* von (P_3).

(f) Bestimme die Menge der optimalen Lösungen $L \in \mathbb{R}[X]_2^*$ von (P_2).

Bearbeitungszeit: 110 Minuten.