§4 Dimensionstheorie

4.1 Transzendenzgrad von Körpererweiterungen und Algebren

In diesem Abschnitt sei stets $L|K$ eine Körpererweiterung und A eine kommutative K-Algebra.

Proposition 4.1.1. Seien $E \subseteq A$ und $F \subseteq A$ mit $E \cap F = \emptyset$. Dann ist $E \cup F$ algebraisch unabhängig [→1.1.11] genau dann, wenn E algebraisch unabhängig ist und F in der $K[E]$-Algebra A algebraisch unabhängig ist.

Beweis. „$\Longrightarrow$“ Sei $E \cup F$ algebraisch unabhängig. Seien $y_1, \dots, y_m \in F$ paarweise verschieden und $f \in K[E][Y_1, \dots, Y_m]$ mit $f(y_1, \dots, y_m) = 0$. Zu zeigen ist $f = 0$. Wähle paarweise verschiedene $x_1, \dots, x_n \in E$ mit $f \in K[x_1, \dots, x_n, \underline{Y}]$. Wähle $g \in K[\underline{X}, \underline{Y}]$ mit $f = g(x_1, \dots, x_n, \underline{Y})$. Wegen $E \cap F = \emptyset$ sind $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in E \cup F$ paarweise verschieden. Aus $g(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = f(y_1, \dots, y_m) = 0$ folgt daher $g = 0$ und somit $f = 0$.

„$\Longleftarrow$“ geht ähnlich. □

Erinnerung 4.1.2. [→1.1.10] (Körperadjunktion) Ist $E \subseteq L$, so ist

$$K(E) := (K[E] \setminus \{0\})^{-1} K[E] = \operatorname{qf}(K[E]) \subseteq L$$

der kleinste Unterkörper von L, der $K \cup E$ enthält. Für $b_1, \dots, b_n \in L$ schreibt man auch $K(b_1, \dots, b_n)$ statt $K(\{b_1, \dots, b_n\})$.

Korollar 4.1.3. Seien $E \subseteq L$ und $F \subseteq L$ mit $E \cap F = \emptyset$. Dann ist $E \cup F$ K-algebraisch unabhängig genau dann, wenn E K-algebraisch unabhängig und F $K(E)$-algebraisch unabhängig ist.

Beweis. Folgt sofort aus 4.1.1, denn offensichtlich

$$F \text{ ist } K(E)\text{-algebraisch unabhängig} \iff F \text{ ist } K[E]\text{-algebraisch unabhängig.}$$

□

Proposition 4.1.4. [→LA6.2.1(b)] Sei $E \subseteq L$. Dann ist E K-algebraisch unabhängig genau dann, wenn kein $x \in E$ algebraisch über $K(E \setminus \{x\})$ ist.

Beweis. Sei E K-algebraisch unabhängig. Ist dann $x \in E$, so ist nach 4.1.3 $\{x\}$ $K(E \setminus \{x\})$-algebraisch unabhängig, das heißt x nicht algebraisch über $K(E \setminus \{x\})$.

Sei umgekehrt E K-algebraisch unabhängig. Wir zeigen, dass es $x \in E$ gibt mit x algebraisch über $K(E \setminus \{x\})$. Wähle $f \in K[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$ und $a_1, \dots, a_n \in L$ mit $f(a_1, \dots, a_n) = 0$, wobei $n \in \mathbb{N}$ so klein wie möglich gewählt sei. Wir zeigen, dass a_1 algebraisch über $K(a_2, \dots, a_n)$ ist. Wegen der Minimalität von n gilt $f \notin K[X_2, \dots, X_n]$, das heißt es gibt $k \in \mathbb{N}$ und $g_0, \dots, g_k \in K[X_2, \dots, X_n]$ mit $g_k \neq 0$ derart, dass $f = \sum_{i=0}^k g_i X_1^i$. Wegen der Minimalität von n gilt $g_k(a_2, \dots, a_n) \neq 0$ und daher

$$a_1^k + \frac{g_{k-1}(a_2, \dots, a_n)}{g_k(a_2, \dots, a_n)} a_1^{k-1} + \ldots + \frac{g_0(a_2, \dots, a_n)}{g_k(a_2, \dots, a_n)} = 0.$$

□

Definition 4.1.5. Eine Menge $B \subseteq L$ heißt *Transzendenzbasis* der Körpererweiterung $L|K$ (oder Transzendenzbasis von L über K), falls B K-algebraisch unabhängig und $L|K(B)$ algebraisch ist. Man sagt, $x_1, \dots, x_n \in L$ bilden eine Transzendenzbasis von $L|K$, wenn $x_1, \dots, x_n$ K-algebraisch unabhängig sind [→1.1.11] und $L|K(x_1, \dots, x_n)$ algebraisch ist.

Satz 4.1.6. [→LA6.2.14] Seien $F \subseteq B \subseteq G \subseteq L$ derart, dass F K-algebraisch unabhängig und $L|K(G)$ algebraisch ist. Dann sind äquivalent:

(a) B ist Transzendenzbasis von $L|K$

(b) $L|K(B)$ ist algebraisch, aber $L|K(C)$ ist für kein C mit $F \subseteq C \subset B$ algebraisch.

(c) B ist K-algebraisch unabhängig, aber kein D mit $B \subset D \subseteq G$ ist K-algebraisch unabhängig.

Beweis. <u>(a) $\Longrightarrow$ (b)</u> Gelte (a) und sei $F \subseteq C \subset B$. Wähle $x \in B \setminus C$. Nach 4.1.4 ist dann x nicht algebraisch über $K(C)$.

<u>(b) $\Longrightarrow$ (c)</u> Gelte (b). Ist $B \subset D \subseteq G$ und wählt man $x \in D \setminus B$, so ist x algebraisch über $K(B)$ und daher D nicht algebraisch unabhängig nach 4.1.2. Noch zu zeigen: B K-algebraisch unabhängig. Nach 4.1.3 reicht es zu zeigen, dass $B \setminus F$ $K(F)$-algebraisch unabhängig ist. Nach 4.1.4 ist hierzu zu zeigen, dass kein $x \in B \setminus F$ algebraisch über $K(F)((B \setminus F) \setminus \{x\}) = K(B \setminus \{x\})$ ist. Wäre aber ein $x \in B \setminus F$ algebraisch über $K(B \setminus \{x\})$, so würde für $C := B \setminus \{x\}$ gelten: $F \subseteq C \subset B$ und $L|K(C)$ ist wegen der Transitivität der Algebraizität algebraisch, denn $L|K(B)$ ist nach (b) algebraisch und $K(B)|K(C)$ ist algebraisch, weil $K(B) = K(C)(x)$ und x algebraisch über $K(C)$ ist $\lightning$.

<u>(c) $\Longrightarrow$ (a)</u> Gelte (c). Zu zeigen: $L|K(B)$ algebraisch. Es genügt zu zeigen, dass jedes $x \in G$ algebraisch über $K(B)$ ist, denn dann sind $L|K(G)$ und $K(G)|K(B)$ und damit auch $L|K(B)$ algebraisch. Sei also $x \in G \setminus B$. Zu zeigen: x algebraisch über $K(B)$. Nach (c) ist $B \cup \{x\}$ K-algebraisch abhängig. Nach 4.1.3 ist daher $\{x\}$ $K(B)$-algebraisch abhängig, das heißt x algebraisch über $K(B)$. □

Korollar 4.1.7. Für $B \subseteq L$ sind äquivalent:

(a) B ist Transzendenzbasis von $L|K$.

(b) B ist minimal bezüglich der Eigenschaft, dass $L|K(B)$ algebraisch ist.

(c) B ist eine maximale K-algebraisch unabhängige Teilmenge von L.

Satz 4.1.8. Seien $F \subseteq G \subseteq L$ derart, dass F K-algebraisch unabhängig und $L|K(G)$ algebraisch ist. Dann gibt es eine Transzendenzbasis B von $L|K$ mit $F \subseteq B \subseteq G$.

Beweis. Betrachte die durch Inklusion halbgeordnete Menge $\mathscr{M}$ aller K-algebraisch unabhängigen Mengen E mit $F \subseteq E \subseteq G$. Jede Kette in $\mathscr{M}$ hat eine obere Schranke in $\mathscr{M}$ (die leere Kette F und jede andere Kette ihre Vereinigungsmenge). Nach dem Zornschen Lemma [$\rightarrow$LA12.2.8] besitzt $\mathscr{M}$ ein maximales Element B. Nach 4.1.6(c) ist B eine Transzendenzbasis von $L|K$. $\square$

Korollar 4.1.9. Jede Körpererweiterung besitzt eine Transzendenzbasis.

Proposition 4.1.10. Sei F ein Zwischenkörper von $L|K$, B eine Transzendenzbasis von $F|K$ und C eine von $L|F$. Dann ist $B \cap C = \emptyset$ und $B \cup C$ eine Transzendenzbasis von $L|K$.

Beweis. $B \cap C = \emptyset$ ist trivial. Da B K-algebraisch unabhängig und C F-algebraisch unabhängig insbesondere $K(B)$-algebraisch unabhängig ist, ist nach 4.1.3 $B \cup C$ K-algebraisch unabhängig. Es bleibt zu zeigen, dass $L|K(B \cup C)$ algebraisch ist. Da L algebraisch über $F(C)$ ist, reicht es zu zeigen, dass $F(C)$ algebraisch über $K(B \cup C)$ ist Hierfür reicht es zu zeigen, dass F algebraisch über $K(B)$ ist, was vorausgesetzt ist. $\square$

Proposition 4.1.11 (Austauschlemma)**.** [$\rightarrow$LA6.2.5] Sei $x_1, \dots, x_n$ eine Transzendenzbasis von $L|K$. Sei $y \in L$ nicht algebraisch über $K(x_2, \dots, x_n)$. Dann ist auch $y, x_2, \dots, x_n$ eine Transzendenzbasis von $L|K$.

Beweis. Da $x_2, \dots, x_n$ eine Transzendenzbasis von $K(x_2, \dots, x_n)|K$ ist, kann man durch Ersetzen von K durch $K(x_2, \dots, x_n)$ wegen 4.1.10 Œ $n = 1$ annehmen. Dann ist zu zeigen, dass x_1 algebraisch über $K(y)$ ist. Œ $y \neq x_1$. Da y algebraisch über $K(x_1)$ ist, sind nach 4.1.4 x_1 und y K-algebraisch abhängig. Nach 4.1.3 ist daher $\{y\}$ K-algebraisch abhängig oder $\{x_1\}$ $K(y)$-algebraisch abhängig, das heißt y algebraisch über K oder x_1 über $K(y)$. $\square$

Satz 4.1.12 (Austauschssatz)**.** [$\rightarrow$LA6.2.6] Sei $x_1, \dots, x_n$ eine Transzendenzbasis von $L|K$ und seien $y_1, \dots, y_m \in L$ K-algebraisch unabhängig. Dann gibt es paarweise verschiedene $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ so, dass $x_1, \dots, x_n$ nach Ersetzen von x_{i_j} durch y_j ($j \in \{1, \dots, m\}$) immer noch eine Transzendenzbasis von $L|K$ bilden. Insbesondere gilt $m \leq n$.

Beweis. Induktion nach m.

Im Fall $\underline{m=0}$ ist nichts zu zeigen.

$\underline{m=1}$ Da y nicht algebraisch über K ist, gilt $n \geq 1$. Wähle $s \in \{1,\dots,n\}$ minimal derart, dass y algebraisch über $K(x_1,\dots,x_s)$ ist. Dann ist y im (relativen) algebraischen Abschluss F von $K(x_1,\dots,x_s)$ in L und $x_1,\dots,x_s$ ist eine Transzendenzbasis von F. Nach dem Austauschlemma 4.1.11 ist $x_1,\dots,x_{s-1},y$ eine Transzendenzbasis von $F|K$. Wir behaupten, dass $x_1,\dots,x_{s-1},y,x_{s+1},\dots,x_n$ eine Transzendenzbasis von $L|K$ ist. Dies folgt mit 4.1.10, sofern $x_{s+1},\dots,x_n$ eine Transzendenzbasis von $L|F$ ist. Wegen $F(x_{s+1},\dots,x_n) \supseteq K(x_1,\dots,x_s,x_{s+1},\dots,x_n)$ ist sicher $L|F(x_{s+1},\dots,x_n)$ algebraisch. Um zu zeigen, dass $x_{s+1},\dots,x_n$ F-algebraisch unabhängig sind, wenden wir 4.1.4 an: Sei $i \in \{s+1,\dots,n\}$. Wäre x_i algebraisch über $F(\{x_{s+1},\dots,x_n\} \setminus \{x_i\})$, so auch über $K(\{x_1,\dots,x_n\} \setminus \{x_i\})$ (denn mit $F|K(x_1,\dots,x_s)$ ist auch $F(\{x_{s+1},\dots,x_n\} \setminus \{x_i\})$ über $K(x_1,\dots,x_s)(\{x_{s+1},\dots,x_n\} \setminus \{x_i\}) = K(\{x_1,\dots,x_n\} \setminus \{x_i\})$ algebraisch), was wegen 4.1.4 nicht möglich ist.

$\underline{m-1 \to m \quad (m \geq 2)}$ Nach IV und Umnummerierung gilt $n \geq m-1$ und

$$y_1,\dots,y_{m-1},x_m,\dots,x_n$$

bilden eine Transzendenzbasis von $L|K$. Nach 4.1.3 ist dann $x_m,\dots,x_n$ eine Transzendenbasis von $L|K(y_1,\dots,y_{m-1})$ und y_m $K(y_1,\dots,y_{m-1})$-algebraisch unabhängig. Hier sieht man $n \geq m$. Mit dem Fall $m=1$ folgt, dass Œ $y_m,x_{m+1},\dots,x_n$ eine Transzendenzbasis von $L|K(y_1,\dots,y_{m-1})$ ist. Mit 4.1.10 folgt, dass $y_1,\dots,y_{m-1},y_m,x_{m+1},\dots,x_n$ eine Transzendenzbasis von $L|K$ ist. □

Korollar 4.1.13. Seien B und C Transzendenzbasen von $L|K$. Dann sind entweder B und C beide unendlich oder B und C beide endlich mit $\#B = \#C$.

Definition 4.1.14. Der *Transzendenzgrad* von $L|K$ ist definiert durch

$$\operatorname{trdeg}(L|K) := \#B \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

für eine beliebige Transzendenzbasis B von $L|K$.

Proposition 4.1.15. Ist F ein Zwischenkörper von $L|K$, so

$$\operatorname{trdeg}(L|K) = \operatorname{trdeg}(L|F) + \operatorname{trdeg}(F|K),$$

wobei man $\infty + n = n + \infty = \infty$ setzt für alle $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.

Beweis. Direkt aus 4.1.10. □

Proposition 4.1.16. Seien $n := \operatorname{trdeg}(L|K) < \infty$ und $x_1,\dots,x_n \in L$. Dann sind äquivalent:

(a) $x_1,\dots,x_n$ bilden eine Transzendenzbasis von $L|K$.

(b) $L|K(x_1,\dots,x_n)$ ist algebraisch.

(c) $x_1, \dots, x_n$ sind K-algebraisch unabhängig.

Beweis. (a)$\Longrightarrow$(b) und (a)$\Longrightarrow$(c) sind trivial.
(b)$\Longrightarrow$(a) und (c)$\Longrightarrow$(a) folgen aus 4.1.8 und 4.1.13. $\square$

Definition 4.1.17. Der *Transzendenzgrad* der K-Algebra A ist definiert durch

$$\begin{aligned}\operatorname{trdeg} A := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es gibt } K\text{-algebraisch unabhängige } x_1, \dots, x_n \in A\}\\ \in \{-1\} \cup \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\},\end{aligned}$$

wobei das Supremum in der geordneten Menge $\{-1\} \cup \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ genommen wird.

Bemerkung 4.1.18. $\operatorname{trdeg} A = -1 \iff A = \{0\} \iff 1 = 0$ in A, denn für $n := 0$ gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{trdeg} A = -1 &\iff \emptyset \text{ ist algebraisch abhängig in } A\\ &\iff \exists f \in K^\times = K[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\} : f \cdot 1_A = 0_A \text{ in } A\\ &\iff 1 = 0 \text{ in } A.\end{aligned}$$

Beispiel 4.1.19. In $A := K[X,Y,Z]/(XZ,YZ)$ sind $x := \overline{X}$ und $y := \overline{Y}$ algebraisch unabhängig, denn ist $f \in K[X,Y]$ mit $f(x,y) = 0$, so gibt es $g,h \in K[X,Y,Z]$ mit $f = gXZ + hYZ$ und man kann Z durch 0 substituieren, um $f = 0$ zu erhalten. Es gibt kein Element $a \in A$ derart, dass x,y,a algebraisch unabhängig sind, denn man könnte $a = p(x,y,z)$ für ein $p \in K[X,Y,Z]$ schreiben, wobei $z := \overline{Z}$, und hätte für $f := XYZ - XYp(X,Y,0) \in K[X,Y,Z] \setminus \{0\}$

$$f(x,y,a) = xyp(x,y,z) - xyp(x,y,0) \underset{yz=0}{\overset{xz=0}{=}} xyp(x,y,0) - xyp(x,y,0) = 0.$$

Auch z ist algebraisch unabhängig in A, denn ist $f \in K[Z]$ mit $f(z) = 0$, so gibt es $g,h \in K[X,Y,Z]$ mit $f = gXZ + hYZ$ und man kann X und Y durch 0 substituieren, um $f = 0$ zu erhalten. Wieder gibt es kein Element $a \in A$ derart, dass z,a algebraisch unabhängig sind, denn man könnte $a = p(x,y,z)$ für ein $p \in K[X,Y,Z]$ schreiben und hätte für $f := ZT - Zp(0,0,Z) \in K[T,Z] \setminus \{0\}$, dass

$$f(a,z) = zp(x,y,z) - zp(0,0,z) \underset{yz=0}{\overset{xz=0}{=}} zp(0,0,z) - zp(0,0,z) = 0.$$

Proposition 4.1.20. [$\to$1.4.23(b)] In einem kommutativen Ring enthält jedes Primideal ein minimales Primideal.

Beweis. Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal. Betrachte die durch Inklusion halbgeordnete Menge $\mathscr{M}$ aller Primideal $\mathfrak{q} \subseteq R$ mit $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. Jede Kette in $\mathscr{M}$ hat eine untere Schranke in $\mathscr{M}$. Sei nämlich $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{M}$ eine Kette. Falls $\mathscr{C} = \emptyset$, so ist $\mathfrak{p}$ eine untere Schranke von $\mathscr{C}$. Sei also $\mathscr{C} \neq 0$. Wir behaupten, dass das Ideal $\mathfrak{q} := \bigcap \mathscr{C} \subseteq \mathfrak{p}$ ein Primideal und damit eine untere Schranke von $\mathscr{C}$ ist. Es ist klar, dass $1 \notin \mathfrak{q}$. Seien nun $a,b \in R$ mit $ab \in \mathfrak{q}$ und $a \notin \mathfrak{q}$. Zu zeigen: $b \in \mathfrak{q}$. Wegen $a \notin \mathfrak{q}$ gibt es $I \in \mathscr{C}$ mit $a \notin I$. Sei $J \in \mathscr{C}$. Zu zeigen: $b \in J$. Wegen $ab \in \mathfrak{q} \subseteq I$ und $a \notin I$ gilt $b \in I$. Daher sind wir fertig, falls $I \subseteq J$. Gelte also nun $I \nsubseteq J$. Da $\mathscr{C}$ eine Kette ist, gilt dann $J \subseteq I$. Wegen $ab \in \mathfrak{q} \subseteq J$ und $a \notin J$ (denn $a \notin I$) gilt $b \in J \subseteq I$. $\square$

Proposition 4.1.21. Sei B ein Unterring des kommutativen Ringes R und $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal von B. Dann gibt es ein minimales Primideal $\mathfrak{q}$ von R mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap B$.

Beweis. $S := B \setminus \mathfrak{p}$ ist eine multiplikative Teilmenge von B und damit auch von R mit $0 \notin S$. Daher gibt es ein Primideal $\mathfrak{q}$ von R mit $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$, welches nach 4.1.20 Œ als minimal angenommen weden kann. Es gilt $\mathfrak{q} \cap B \subseteq B \setminus S = \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{q} \cap B$ ein Primideal von B ist, gilt wegen der Minimalität von $\mathfrak{p}$, dass $\mathfrak{q} \cap B = \mathfrak{p}$. □

Lemma 4.1.22. Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_1, \dots, x_n \in A$ algebraisch unabhängig in A. Dann gibt es ein minimales Primideal $\mathfrak{p}$ von A derart, dass $\overline{x_1}^{\mathfrak{p}}, \dots, \overline{x_n}^{\mathfrak{p}}$ algebraisch unabhängig in $A/\mathfrak{p}$ sind.

Beweis. $K[x_1, \dots, x_n]$ ist als Polynomring über einem Körper ein Integritätsring. Nach 4.1.21 gibt es also ein minimales Primideal $\mathfrak{p}$ von A mit $\mathfrak{p} \cap K[x_1, \dots, x_n] = (0)$. Sei schließlich $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ mit $f(\overline{x_1}^{\mathfrak{p}}, \dots, \overline{x_n}^{\mathfrak{p}}) = 0$ in $A/\mathfrak{p}$. Zu zeigen: $f = 0$. Wir haben $\overline{f(x_1, \dots, x_n)}^{\mathfrak{p}} = f(\overline{x_1}^{\mathfrak{p}}, \dots, \overline{x_n}^{\mathfrak{p}}) = 0$ und damit

$$f(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{p} \cap K[x_1, \dots, x_n] = (0).$$

Da $x_1, \dots, x_n$ algebraisch unabhängig in A sind, folgt $f = 0$. □

Lemma 4.1.23. Die K-Algebra A sei ein Integritätsring, es seien $n \in \mathbb{N}$ und

$$x_1, \dots, x_n, y \in A \setminus \{0\}$$

derart, dass $\frac{x_1}{y}, \dots, \frac{x_n}{y}$ K-algebraisch unabhängig in $\operatorname{qf}(A)$ sind. Dann sind $x_1, \dots, x_n$ in A algebraisch unabhängig oder es gibt ein $i \in \{1, \dots, n\}$ derart, dass

$$x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n$$

in A algebraisch unabhängig sind.

Beweis. Œ $K \subseteq A$ (sonst tausche K durch sein Bild unter $K \hookrightarrow A,\ a \mapsto a \cdot 1$ aus)

Fall 1 y algebraisch über K
Dann ist $\frac{x_1}{y}, \dots, \frac{x_n}{y}$ eine Transzendenzbasis von

$$K\left(\frac{x_1}{y}, \dots, \frac{x_n}{y}, y\right) = K(x_1, \dots, x_n, y)$$

über K. Nach 4.1.8 und 4.1.13 enthält $\{x_1, \dots, x_n, y\}$ eine n-elementige Transzendenzbasis von $K(x_1, \dots, x_n, y)|K$, die notwendig $\{x_1, \dots, x_n\}$ sein muss, da y algebraisch über K ist. Also sind $x_1, \dots, x_n$ in A algebraisch unabhängig.

Fall 2 y nicht algebraisch über K

Fall 2.1 $\frac{x_1}{y}, \dots, \frac{x_n}{y}, y$ sind algebraisch unabhängig in A
Analog zu Fall 1 zeigt man dann, dass sogar $x_1, \dots, x_n, y$ algebraisch unabhängig in A sind.

Fall 2.2 $\frac{x_1}{y}, \ldots, \frac{x_n}{y}, y$ sind algebraisch abhängig in A
Nach 4.1.6(c) ist dann $\frac{x_1}{y}, \ldots, \frac{x_n}{y}$ eine Transzendenzbasis von

$$L := K\left(\frac{x_1}{y}, \ldots, \frac{x_n}{y}, y\right) = K(x_1, \ldots, x_n, y)$$

über K. Nach 4.1.8 und 4.1.13 gibt es eine n-elementige Teilmenge von $\{x_1, \ldots, x_n, y\}$, die Transzendenzbasis von $L|K$ und damit algebraisch unabhängig in A ist. □

Satz 4.1.24.

$$\begin{aligned} \operatorname{trdeg} A &= \sup\{\operatorname{trdeg}(\operatorname{qf}(A/\mathfrak{p})|K) \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal von } A\} \\ &= \sup\{\operatorname{trdeg}(\operatorname{qf}(A/\mathfrak{p})|K) \mid \mathfrak{p} \text{ minimales Primideal von } A\} \\ &\in \{-1\} \cup \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \operatorname{trdeg} A &\overset{4.1.22}{\leq} \sup\{\operatorname{trdeg}(\operatorname{qf}(A/\mathfrak{p})|K) \mid \mathfrak{p} \text{ minimales Primideal von } A\} \\ &\overset{\text{trivial}}{\leq} \sup\{\operatorname{trdeg}(\operatorname{qf}(A/\mathfrak{p})|K) \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal von } A\} \\ &\overset{4.1.23}{\leq} \operatorname{trdeg} A \end{aligned}$$

□

Korollar 4.1.25. Sei $E \subseteq A$ mit $A = K[E]$. Dann

$$\begin{aligned} \operatorname{trdeg} A = \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es gibt } K\text{-algebraisch unabhängige } x_1, \ldots, x_n \in E\} \\ \in \{-1\} \cup \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}. \end{aligned}$$

Beweis. „$\geq$" ist trivial lauf Definition 4.1.17.

„$\leq$" Nach 4.1.24 genügt es für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A zu zeigen, dass

$$\operatorname{trdeg}(\operatorname{qf}(A/\mathfrak{p})|K) \leq \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es gibt } K\text{-algebraisch unabhängige } x_1, \ldots, x_n \in E\}.$$

Sei also $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A. Wegen $A = K[E]$ gilt $A/\mathfrak{p} = K[\{\overline{x}^{\mathfrak{p}} \mid x \in E\}]$ und $\operatorname{qf}(A/\mathfrak{p}) = K(\{\overline{x}^{\mathfrak{p}} \mid x \in E\})$. Nach 4.1.8 enthält $\{\overline{x}^{\mathfrak{p}} \mid x \in E\}$ eine Transzendenzbasis von $\operatorname{qf}(A/\mathfrak{p})|K$. Wählt man für jedes Element dieser Transzendenzbasis einen Vertreter aus E, so erhält man eine K-algebraisch unabhängige Teilmenge von E. □

Beispiel 4.1.26. Seien A, x, y, z wie in 4.1.19. Wegen $A = K[x, y, z]$ und 4.1.25 besagen die Beobachtungen aus 4.1.19, dass $\operatorname{trdeg} A = 2$.

Erinnerung 4.1.27. [$\rightarrow$Z2.1.2] Sei B ein Unterring des kommutativen Ringes R. Dann heißt ein $x \in R$ *ganz* über B, wenn es ein *normiertes* $f \in B[X]$ gibt mit $f(x) = 0$. Es heißt R *ganz* über B, wenn jedes Element von R ganz über B ist.

Bemerkung 4.1.28. Sei B eine K-Unteralgebra von A. Dann $\operatorname{trdeg} B \leq \operatorname{trdeg} A$.

Korollar 4.1.29. Sei B eine K-Unteralgebra von A und A ganz über B. Dann $\operatorname{trdeg} B = \operatorname{trdeg} A$.

Beweis. „$\leq$“ ist trivial nach 4.1.28.

„$\geq$“ Mit 4.1.24 reicht es zu zeigen, dass es zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ von A ein Primideal $\mathfrak{q}$ von B gibt mit $\operatorname{trdeg}(\operatorname{qf}(A/\mathfrak{p})|K) = \operatorname{trdeg}(\operatorname{qf}(B/\mathfrak{q})|K)$. Sei also $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A. Setze $\mathfrak{q} := \mathfrak{p} \cap B$. Nach Homomorphiesatz haben wir eine kanonische Einbettung $B/\mathfrak{q} \hookrightarrow A/\mathfrak{p}$ von K-Algebren, die man eindeutig zu einem K-Homomorphismus $\operatorname{qf}(B/\mathfrak{q}) \hookrightarrow \operatorname{qf}(A/\mathfrak{p})$ erweitern kann vermöge dessen $\operatorname{qf}(A/\mathfrak{p})|\operatorname{qf}(B/\mathfrak{q})$ eine Körpererweiterung ist. Da A über B ganz ist, ist auch $A/\mathfrak{p}$ über $B/\mathfrak{q}$ ganz. Damit ist jedes Element von $A/\mathfrak{p}$ algebraisch über $\operatorname{qf}(B/\mathfrak{q})$ und daher $\operatorname{qf}(A/\mathfrak{p})|\operatorname{qf}(B/\mathfrak{q})$ algebraisch. Mit 4.1.15 folgt $\operatorname{trdeg}(\operatorname{qf}(A/\mathfrak{p})|K) = 0 + \operatorname{trdeg}(\operatorname{qf}(B/\mathfrak{q})|K)$. □

Korollar 4.1.30. Sei $S \subseteq A$ multiplikativ ohne Nullteiler. Dann

$$\operatorname{trdeg}(S^{-1}A) = \operatorname{trdeg}(A).$$

Beweis. „$\geq$“ folgt aus 4.1.28, da $A \subseteq S^{-1}A$.

„$\leq$“ Nach 4.1.24 reicht es zu zeigen, dass es zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ von $S^{-1}A$ ein Primideal $\mathfrak{q}$ von A gibt mit $\operatorname{trdeg}(\operatorname{qf}((S^{-1}A)/\mathfrak{p})|K) = \operatorname{trdeg}(\operatorname{qf}(A/\mathfrak{q})|K)$. Sei also $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $S^{-1}A$. Dann gilt $\mathfrak{p} = S^{-1}\mathfrak{q}$ für das Primideal $\mathfrak{q} := \mathfrak{p} \cap A$ von A mit $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$. Nach Homomorphiesatz haben wir eine kanonische Einbettung $A/\mathfrak{q} \hookrightarrow S^{-1}A/\mathfrak{p}$, die man eindeutig zu einem K-Homomorphismus $\operatorname{qf}(A/\mathfrak{q}) \hookrightarrow \operatorname{qf}(S^{-1}A/\mathfrak{p})$ erweitern kann, der aber surjektiv ist, wie man sich leicht überlegt. Also

$$\operatorname{qf}(A/\mathfrak{q}) \cong_K \operatorname{qf}(S^{-1}A/\mathfrak{p}).$$

□

Bemerkung 4.1.31. Ist I ein Ideal von A, so $\operatorname{trdeg}(A/I) \leq \operatorname{trdeg}(A)$.

Korollar 4.1.32. Sei $S \subseteq A$ multiplikativ und A_S die Lokalisierung von A nach S. Dann $\operatorname{trdeg}(A_S) \leq \operatorname{trdeg}(A)$.

Beweis. 4.1.31 und 4.1.30. □

4.2 Krulldimension von Ringen [Wolfgang Krull *1899 †1971]

In diesem Abschnitt sei stets A ein kommutativer Ring.

Definition 4.2.1. [→4.1.17] Die *Krulldimension* des Ringes A ist definiert durch

$$\dim A := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es gibt Primideale } \mathfrak{p}_0 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n \subset A\} \in \{-1\} \cup \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\},$$

wobei das Supremum in der geordneten Menge $\{-1\} \cup \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ genommen wird.

Bemerkung 4.2.2. (a) $\dim A = -1 \iff A = \{0\} \iff 1 = 0$ in A, denn ist $A \neq \{0\}$, so besitzt A ein Primideal (sogar ein maximales Ideal).

(b) Ist A Integritätsring, so

$$\dim A = 0 \iff (0) \text{ maximales Ideal in } A \iff A \text{ Körper}.$$

(c) Ist A ein Hauptidealring, der kein Körper ist, dann $\dim A = 1$.

Lemma 4.2.3. Seien K ein Körper, A eine kommutative K-Algebra, $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_n$ Primideale von A mit $\mathfrak{p}_0 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n$ und $x_1, \dots, x_n \in A$ mit $x_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \mathfrak{p}_{i-1}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann sind $x_1, \dots, x_n$ algebraisch unabhängig in A.

Beweis. Induktion nach n.

$\underline{n = 0}$ Da $1 \notin \mathfrak{p}_0$ gilt $1 \neq 0$ in A, das heißt $\emptyset$ ist algebraisch unabhängig in A [$\to$4.1.18].

$\underline{n-1 \to n \ (n \in \mathbb{N})}$ Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf

$$(0) = \mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n/\mathfrak{p}_1 \text{ in } A/\mathfrak{p}_1 \qquad \text{und} \qquad \overline{x_2}^{\mathfrak{p}_1}, \dots, \overline{x_n}^{\mathfrak{p}_1} \in A/\mathfrak{p}_1$$

liefert, dass $\overline{x_2}^{\mathfrak{p}_1}, \dots, \overline{x_n}^{\mathfrak{p}_1}$ algebraisch unabhängig in $A/\mathfrak{p}_1$ sind. Sei nun $f \in K[\underline{X}] \setminus \{0\}$ mit $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{p}_0$. Es reicht, $g \in K[\underline{X}] \setminus \{0\}$ mit $\deg g < \deg f$ und $g(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{p}_0$ zu finden. Schreibe $f = X_1 g + h$ mit $g \in K[\underline{X}]$ und $h \in K[X_2, \dots, X_n]$. Dann $h(\overline{x_2}^{\mathfrak{p}_1}, \dots, \overline{x_n}^{\mathfrak{p}_1}) = f(0, \overline{x_2}^{\mathfrak{p}_1}, \dots, \overline{x_n}^{\mathfrak{p}_1}) \overset{x_1 \in \mathfrak{p}_1}{=} f(\overline{x_1}^{\mathfrak{p}_1}, \dots, \overline{x_n}^{\mathfrak{p}_1}) = \overline{f(x_1, \dots, x_n)}^{\mathfrak{p}_1} = 0$ in $A/\mathfrak{p}_1$ und daher $h = 0$. Also $x_1 g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{p}_0$ und wegen $x_1 \notin \mathfrak{p}_0$ dann $g(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{p}_0$. Beachte $g \neq 0$, da sonst $f = 0$. □

Satz 4.2.4. Sei K ein Körper und A eine kommutative K-Algebra. Dann $\dim A \leq \operatorname{trdeg} A$.

Beweis. Direkt aus 4.2.3. □

Lemma 4.2.5. Sei K ein Unterring des Körpers L und L ganz über K. Dann ist auch K ein Körper.

Beweis. Sei $x \in K \setminus \{0\}$. Zu zeigen: $x \in K^\times$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in K$ mit $\left(\frac{1}{x}\right)^n + a_1 \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + \dots + a_n = 0$. Dann $x(-(a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1})) = 1$. □

Lemma 4.2.6. Sei A ein Unterring des kommutativen Ringes B, sei B ganz über A und A habe genau ein maximales Ideal $\mathfrak{p}$ (das heißt A ist lokal [$\to$Z2.6.1]). Dann gilt für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von B, dass $\mathfrak{m} \cap A = \mathfrak{p}$.

Beweis. Wende 4.2.5 auf $A/(\mathfrak{m} \cap A) \hookrightarrow B/\mathfrak{m}$, um zu sehen, dass $\mathfrak{m} \cap A$ ein maximales Ideal von A ist. □

Proposition 4.2.7 („Lying over“)**.** Sei A ein Unterring des kommutativen Ringes B und B ganz über A. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A. Dann gibt es ein Primideal $\mathfrak{q}$ von B mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$.

Beweis. $S := A \setminus \mathfrak{p}$ ist eine multiplikative Teilmenge von A und von B. Betrachte die Lokalisierungen A_S und B_S von A und B nach S und den Homomorphismus

$$A_S \to B_S,\ \frac{\overline{a}}{\overline{s}} \to \frac{\overline{a}}{\overline{s}}\ (a \in A, s \in S).$$

Dieser Homomorphismus ist injektiv und wir können A_S als Unterring von B_S sehen. Man sieht leicht (direktes Argument oder mit Z2.1.10), dass B_S ganz über A_S ist. Da die zu S disjunkten Primideale von A genau den Primidealen von A_S entsprechen, hat A_S genau ein maximales Ideal, nämlich $\overline{S}^{-1}\overline{\mathfrak{p}}$. Wähle ein maximales Ideal von B_S. Dieses ist von der Form $\overline{S}^{-1}\overline{\mathfrak{q}}$ für ein Primideal $\mathfrak{q}$ von B mit $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$ und nach 4.2.6 gilt $\overline{S}^{-1}\overline{\mathfrak{q}} \cap A_S = \overline{S}^{-1}\overline{\mathfrak{p}}$. Schließlich gilt für $x \in A$ einerseits

$$\begin{aligned} \overline{x} \in \overline{S}^{-1}\overline{\mathfrak{q}} \cap A_S &\iff \overline{x} \in \overline{S}^{-1}\overline{\mathfrak{q}} \\ &\iff \exists q \in \mathfrak{q} : \exists s \in S : \overline{xs} = \overline{q} \\ &\iff \exists q \in \mathfrak{q} : \exists s, t \in S : xst = qt \underset{s:=t:=1}{\overset{s,t \notin \mathfrak{q}}{\rightleftarrows}} x \in \mathfrak{q} \end{aligned}$$

und andererseits analog $\overline{x} \in \overline{S}^{-1}\overline{\mathfrak{p}} \iff x \in \mathfrak{p}$. Es folgt also $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$. □

Proposition 4.2.8 („Going up"). Sei A ein Unterring des kommutativen Ringes B, B ganz über A, $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A und I ein Ideal von B mit $I \cap A \subseteq \mathfrak{p}$. Dann gibt es ein Primideal $\mathfrak{q}$ von B mit $I \subseteq \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$.

Beweis. Gehe von $A \subseteq B$ über zu $A/(I \cap A) \hookrightarrow B/I$ und wende 4.2.7 an. □

Bemerkung 4.2.9. (a) In 4.2.8 ist die Voraussetzung $I \cap A \subseteq \mathfrak{p}$ offensichtlich unverzichtbar, denn

$$(I \subseteq \mathfrak{q}\ \&\ \mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A) \implies I \cap A \subseteq \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}.$$

(b) „Lying over" ist der Spezialfall von „Going up" mit $I = (0)$.

Lemma 4.2.10. Sei A ein Unterring des Integritätsrings B und $\mathrm{qf}(B)$ algebraisch über $\mathrm{qf}(A)$ (zum Beispiel B ganz über A). Dann gilt für jedes Ideal $I \neq (0)$ von B, dass $I \cap A \neq (0)$.

Beweis. Sei $x \in B \setminus \{0\}$. Zu zeigen: $(x) \cap A \neq (0)$. Offenbar gibt es $a_0, \dots, a_n \in A$ mit $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ mit $a_0 \neq 0$. □

Proposition 4.2.11. [$\to$4.2.5] Sei A ein Unterring des Integritätsrings B und B ganz über A. Dann A Körper $\iff$ B Körper.

Beweis. „$\Longleftarrow$" 4.2.5 „$\Longrightarrow$" Nach 4.2.10 sind (0) und B die einzigen Ideale von B. □

Proposition 4.2.12. Sei A ein Unterring des kommutativen Ringes B und B ganz über A. Seien $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ Primideale von B mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$. Dann $\mathfrak{p} \cap A \subset \mathfrak{q} \cap A$.

Beweis. Œ $\mathfrak{p} = (0)$ (sonst gehe von $A \subseteq B$ zu $A/(\mathfrak{p} \cap A) \hookrightarrow B/\mathfrak{p}$ über). Wende nun 4.2.10 an. $\square$

Satz 4.2.13. Sei A ein Unterring des kommutativen Ringes B und B ganz über A.

(a) Sind $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_n$ Primideale von A mit $\mathfrak{p}_0 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n$, so gibt es Primideale $\mathfrak{q}_0, \dots, \mathfrak{q}_n$ von B mit $\mathfrak{q}_0 \subset \dots \subset \mathfrak{q}_n$ und $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ für $i \in \{0, \dots, n\}$.

(b) Sind $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n$ Primideale von B mit $\mathfrak{q}_0 \subset \dots \subset \mathfrak{q}_n$ und setzt man $\mathfrak{p}_i := \mathfrak{q}_i \cap A$ für $i \in \{0, \dots, n\}$, so gilt $\mathfrak{p}_0 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n$.

Beweis. (a) Finde $\mathfrak{q}_0$ mit „Lying over" 4.2.7 und $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \dots$ mit „Going up" 4.2.8.

(b) 4.2.12

$\square$

Korollar 4.2.14. [$\to$4.1.29] Sei A ein Unterring des kommutativen Ringes B und B ganz über A. Dann $\dim A = \dim B$.

Satz 4.2.15 (Noetherscher Normalisierungssatz)**.** [Amalie Emmy Noether *1882 †1935] Jede affine K-Algebra [$\to$1.1.19] mit $0 \neq 1$ enthält eine Polynomalgebra über K [$\to$1.1.11], über der sie ganz ist.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$ für alle Algebren der Form $K[x_1, \dots, x_n]$.
$\underline{n = 0}$ ✓
$\underline{n - 1 \to n \quad (n \in \mathbb{N})}$ Sind $x_1, \dots, x_n$ K-algebraisch unabhängig, so ist nichts zu zeigen. Es gebe also $f \in K[\underline{X}] \setminus \{0\}$ mit $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. Schreibe $f = \sum_\alpha a_\alpha \underline{X}^\alpha$ mit $a_\alpha \in K$. Seien $e_2, \dots, e_n \in \mathbb{N}$ im Moment beliebig (später werden wir sie in Abhängigkeit von f festsetzen). Setze $y_2 := x_2 - x_1^{e_2}, \dots, y_n := x_n - x_1^{e_n}$. Dann gilt $x_2 = y_2 + x_1^{e_2}, \dots, x_n = y_n + x_1^{e_n}$ und daher $f(x_1, y_2 + x_1^{e_2}, \dots, y_n + x_1^{e_n}) = 0$. Da $f \notin K$ zeigt diese Gleichung, dass x_1 ganz über $K[y_2, \dots, y_n]$ ist, sofern $\alpha_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n \neq \beta_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $a_\alpha \neq 0 \neq a_\beta$. Wählt man $b \in \mathbb{N}$ groß genug und $e_i := b^i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$, so ist dies sicher gewährleistet. Da die Menge der über $K[y_2, \dots, y_n]$ ganzen Elemente von $K[x_1, \dots, x_n]$ einen Unterring von $K[x_1, \dots, x_n]$ bildet [$\to$Z2.1.10] ist $K[x_1, \dots, x_n] = K[x_1, y_2, \dots, y_n]$ ganz über $K[y_2, \dots, y_n]$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $K[y_2, \dots, y_n]$ ganz über einem Polynomring über K und somit auch $K[x_1, \dots, x_n]$ wegen der Transitivität der Ganzheit [$\to$Z2.1.9]. $\square$

Satz 4.2.16. Sei A eine affine K-Algebra. Dann $\dim A = \operatorname{trdeg} A < \infty$.

Beweis. Ist $A = \{0\}$, so $\dim A = -1 = \operatorname{trdeg} A$. Sei also $A \neq \{0\}$. Nach 4.1.25 gilt $\operatorname{trdeg} A < \infty$. Nach 4.2.15 ist A ganz über $K[X_1, \dots, X_n]$ für K-algebraisch unabhängige $X_1, \dots, X_n \in A$. Nach 4.2.14 gilt $\dim A = \dim K[\underline{X}]$ und nach 4.1.29 $\operatorname{trdeg} A = \operatorname{trdeg} K[\underline{X}] \overset{4.1.24}{=} n$. Es reicht also $\dim K[\underline{X}] = n$ zu zeigen. Nach 4.2.4 gilt $\dim K[\underline{X}] \leq n$. Andererseits sind $(0) \subset (X_1) \subset \dots \subset (X_1, \dots, X_n)$ Primideale in $K[\underline{X}]$, also $\dim K[\underline{X}] \geq n$. $\square$

Bemerkung 4.2.17. Aus dem Noetherschen Normalisierungssatz 4.2.15 folgt sofort das Zariski-Lemma 1.3.5 (und damit der Hilbertsche Nullstellensatz 1.3.7): Sei nämlich A eine affine K-Algebra, die ein Körper ist, Œ $K \subseteq A$. Dann ist A ganz über einem Polynomring $K[X_1, \ldots, X_n]$ in $X_1, \ldots, X_n \in A$. Ist $n = 0$, so ist A ganz über K woraus man leicht sieht dass A ein endlichdimensionaler K-Vektorraum ist (benutze, dass A endlich erzeugt ist). Wäre aber $n \geq 1$, so wäre $\frac{1}{X_1}$ ganz über $K[X_1, \ldots, X_n]$, was man sofort widerlegt.

Definition 4.2.18. [$\to$4.2.1] Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine K-Varietät. Dann bezeichnet man

$$\begin{aligned}\dim V := \sup\{\ell \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es gibt irreduzible } K\text{-Varietäten } V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_\ell \subseteq V\}\\ \in \{-1\} \cup \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\end{aligned}$$

als die *Dimension* von V.

Bemerkung 4.2.19. Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine K-Varietät.

(a) Nach 1.4.22 gilt

$$\begin{aligned}\dim V &= \sup\{\ell \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es gibt Primideale } \mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_\ell \text{ von } K[\underline{X}] \text{ mit}\\ &\qquad\qquad \mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{p}_\ell \supseteq I(V)\}\\ &= \dim(K[\underline{X}]/I(V)) \overset{4.2.16}{=} \operatorname{trdeg}(K[\underline{X}]/I(V))\\ &\overset{4.1.25}{=} \sup\{\ell \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es gibt } i_1, \ldots, i_\ell \in \{1, \ldots, n\} \text{ mit}\\ &\qquad\qquad \overline{X_{i_1}}, \ldots, \overline{X_{i_\ell}} \text{ } K\text{-algebraisch unabhängig in } K[\underline{X}]/I(V)\}\\ &\leq n < \infty.\end{aligned}$$

(b) $\dim V = -1 \iff K[\underline{X}]/I(V) = \{0\} \iff V = \emptyset$