Universität Konstanz Alexander Taveira Blomenhofer
Fachbereich Mathematik und Statistik Markus Schweighofer
Wintersemester 2019/2020

Übungsblatt 11 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. Zeige, dass in 2.7.7 nach einer Inspektion des Beweises die Aussage dahingehend verschärft werden kann, dass $V(J)$ der K-Zariskiabschluss des Bildes von φ (in $\mathbb{A}^m = C^n$) ist.

Aufgabe 2. Betrachte die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\, t \mapsto \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 2t \\ 1-t^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme mit Singular und Aufgabe 1 den $\mathbb{Q}$-Zariskiabschluss des Bildes von φ in $\mathbb{A}^2 = \mathbb{C}^2$.

(b) Bestimme das Bild von φ.

Aufgabe 3. Seien M und N topologische Räume und $\varphi\colon M \to N$ eine Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) φ ist stetig

(b) $\varphi(\overline{A}) \subseteq \overline{\varphi(A)}$ für alle $A \subseteq M$

Aufgabe 4. Zeige folgende Verallgemeinerung von Satz 2.7.2: Sei $C|K$ eine Körpererweiterung, C algebraisch abgeschlossen und A eine Teilmenge von $V(I)$ mit

$$V(I) = \overline{A}.$$

Sei $I \subseteq K[\underline{X}]$ ein Ideal, $r \in \{0,\dots,n\}$ und $\pi\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-r}$, $(x_1,\dots,x_n) \mapsto (x_{r+1},\dots,x_n)$. Dann gilt

$$V(I_r) = \overline{\pi(A)}.$$

Hinweis: Man kann Aufgabe 3 benutzen.

Aufgabe 5. Betrachte die Menge

$$C := \left\{ 3\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(17\varphi) \\ \sin(17\varphi) \end{pmatrix} \;\middle|\; \varphi \in [0,2\pi) \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

In dieser Aufgabe arbeiten wir darauf hin, ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[Y_1,Y_2]$ zu finden mit

$$C = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid f(y) = 0\}.$$

Erst auf dem übernächsten Übungsblatt werden wir das unter Verwendung von zusätzlicher Theorie endgültig bewerkstelligen.

(a) Zeige mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion, dass C invariant ist unter Drehung um einen Winkel von 22,5 Grad um den Ursprung.

(b) Skizziere C von Hand.

(c) Zeige, dass die affine $\mathbb{Q}$-Varietät $V := V(X_1^2 + X_2^2 - 1) \subseteq \mathbb{C}^2 = \mathbb{A}^2$ bezüglich der $\mathbb{Q}$-Zariskitopologie auf $\mathbb{A}^2 = \mathbb{C}^2$ der Abschluss des reellen Einheitskreises $S := V \cap \mathbb{R}^2$ ist.

(d) Finde durch Rechnen mit Polynomen in Singular einen Morphismus $\varphi\colon V \to \mathbb{A}^2$ mit $\varphi(S) = C$.

Hinweis: Dabei kann es hilfreich sein, die komplexe Exponentialfunktion zu betrachten und folgendes Codeschnipsel zu verwenden:

```
ring R=0,(i,x1,x2,y1,y2),lp;
ideal I=(i^2+1);
map conj=R,-i,x1,x2,y1,y2;
proc Re(poly p) {return(reduce((p+conj(p))/2,I))};
proc Im(poly p) {return(reduce(-i*(p-conj(p))/2,I))};
```

(e) Zeige, dass $W := \{(x,y) \in V \times \mathbb{A}^2 \mid \varphi(x) = y\} \subseteq \mathbb{A}^4$ eine affine $\mathbb{Q}$-Varietät ist.

(f) Zeige, dass für die Projektion $\pi\colon \mathbb{A}^4 \to \mathbb{A}^2$, $(x_1,x_2,y_1,y_2) \mapsto (y_1,y_2)$ gilt, dass $\varphi(V) = \pi(W)$ und $C = \varphi(S) = \pi(W \cap \mathbb{R}^4)$.

(g) Zeige $W = \overline{W \cap \mathbb{R}^4}$, wobei $\mathbb{A}^2$ mit der $\mathbb{Q}$-Zariskitopologie ausgestattet sei.

Hinweis: Betrachte einen Einsetzungshomomorphismus $\mathbb{Q}[X_1,X_2,Y_1,Y_2] \to \mathbb{Q}[X_1,X_2]$, der mit φ zu tun hat.

(h) Benutze Aufgabe 4, um mit Hilfe von Gröbnerbasen und Singular ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[Y_1,Y_2] \setminus \{0\}$ zu finden mit

$$V(f) = \overline{\pi(W \cap \mathbb{R}^4)}.$$

(i) Folgere aus (g) und (h), dass $V(f)$ der Abschluss von C ist bezüglich der $\mathbb{Q}$-Zariskitopologie auf $\mathbb{A}^2$.

(j) Folgere aus (i), dass $V(f) \cap \mathbb{R}^2$ der Abschluss von C bezüglich der $\mathbb{Q}$-Zariskitopologie auf $\mathbb{R}^2$ ist, die in 1.4.5 definiert wurde.

(k) Hast Du das Gefühl, dass $V(f) \cap \mathbb{R}^2 = C$ gelten könnte? Worauf beruht Dein Gefühl?

Abgabe bis Freitag, den 24. Januar 2020, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411. Die Singular-Codes müssen zusätzlich per Email bis Freitag, den 24. Januar 2020, 23:59 Uhr an `alexander.taveira-blomenhofer@uni.kn` **geschickt werden.**