Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2019/2020

Alexander Taveira Blomenhofer
Markus Schweighofer

Übungsblatt 4 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. Seien $n \in \mathbb{N}_0$, K ein Körper und $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine K-Varietät. Beweise: Genau dann ist V irreduzibel (als affine K-Varietät, d.h. bzgl. der K-Zariskitopologie), wenn $I(V)$ ein Primideal in $K[\underline{X}]$ ist.

Aufgabe 2. Beweise oder widerlege die folgende Aussage für

(a) $p = 0$,

(b) $p = 2$:

Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ und jeden Körper K der Charakteristik p und jeden algebraisch abgeschlossenen Oberkörper C von K gilt: Sind $V \subseteq \mathbb{A}^m$ und $W \subseteq \mathbb{A}^n$ irreduzible affine K-Varietäten, so ist $V \times W \subseteq \mathbb{A}^{m+n}$ ebenfalls eine irreduzible affine K-Varietät.

Aufgabe 3.
Sei K ein Körper mit $1 + 1 \neq 0$. Beschreibe die irreduziblen Komponenten der affinen K-Varietät

$$V := V(1 - X - YZ, XZ^2 + Z^2) \subseteq \mathbb{A}^3$$

Aufgabe 4. Berechne den $\mathbb{R}$-Zariskiabschluss in $\mathbb{C}^2$ der folgenden Mengen:

(a) $\{(n^4, n^2) \mid n \in \mathbb{N}\}$

(b) $\{(n, \log(n)) \mid n \in \mathbb{N}\}$

(c) $\left\{v \mid \varphi \in \mathbb{Z},\ v = \left(e^{\mathring{i}\frac{\varphi}{98}\pi}, 1\right)\right\}$

Abgabe bis Freitag, den 22. November 2019, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.