Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2019/2020

Alexander Taveira Blomenhofer
Markus Schweighofer

Übungsblatt 2 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. Sei M eine Menge. Eine *Topologie* $\mathscr{O}$ auf M ist eine Menge von Teilmengen von M mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\emptyset, M \in \mathscr{O}$

(2) $\forall U, V \in \mathscr{O} : U \cap V \in \mathscr{O}$

(3) $\forall M \subseteq \mathscr{O} : \bigcup M \in \mathscr{O}$

Man nennt dann die Elemente von $\mathscr{O}$ oft die *offenen Mengen*. Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(M, \mathscr{O})$ bestehend aus einer Menge M und einer Topologie $\mathscr{O}$ auf M. Oft lässt man $\mathscr{O}$ in der Notation weg. Ein topologischer Raum heißt *zusammenhängend*, wenn er nicht die Vereinigung zweier nichtleerer disjunkter offener Mengen ist. Er heißt *irreduzibel*, wenn er nichtleer ist und je zwei nichtleere offene Mengen sich schneiden.

(a) Zeige, dass jeder irreduzible topologische Raum zusammenhängend ist.

(b) Finde ein Beispiel für einen nichtleeren zusammenhängenden topologischen Raum, der nicht irreduzibel ist.

Aufgabe 2. Sei R ein kommutativer Ring mit $0 \neq 1$ und J ein Ideal des Polynomrings $R[X]$ in einer Unbestimmten X über R. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Polynomen mit

$$f_n \in J \setminus (f_1, \dots, f_{n-1})$$

und $\deg(f_n) = \min\{\deg(g) \mid g \in J \setminus (f_1, \dots, f_{n-1})\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Bezeichne für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit a_n den Leitkoeffizienten von f_n. Zeige:

(a) $\deg f_1 \leq \deg f_2 \leq \deg f_3 \leq \dots$

(b) Zu jedem $N \in \mathbb{N}$, jedem $d \in \mathbb{N}_0$ mit $d \geq \deg(f_N)$ und jedem $a \neq 0$ aus dem von $a_1, \dots, a_N$ in R erzeugten Ideal $(a_1, \dots, a_N)$ gibt es ein Polynom vom Grad genau d mit Leitkoeffizienten a im Ideal $(f_1, \dots, f_N)$.

(c) $\forall N \in \mathbb{N} : a_{N+1} \notin (a_1, \dots, a_N)$

(d) Das Ideal $I := (\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\})$ ist nicht endlich erzeugt im Ring R.

(e) R ist nicht noethersch.

Aufgabe 3. Zeige mit Hilfe von Aufgabe 2:

(a) Ist R ein kommutativer Ring mit $0 \neq 1$, so ist der Polynomring $R[X]$ in einer Variablen X über R wieder noethersch.

(b) Ist R ein kommutativer Ring mit $0 \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$, so ist der Polynomring $R[X_1, \dots, X_n]$ über R in den Variablen $X_1, \dots, X_n$ wieder noethersch.

(c) Jeder Quotient eines noetherschen kommutativen Ringes ist wieder noethersch.

(d) Jede endlich erzeugte kommutative Algebra über einem noetherschen kommutativen Ring ist (als Ring) wieder noethersch.

Abgabe bis Freitag, den 8. November 2019, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.