Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2018

Sabine Burgdorf
María López Quijorna
Markus Schweighofer

# Übungsblatt 12 zur Linearen Algebra II

**Aufgabe 1:** Finde zu den folgenden Matrizen $M \in \mathbb{Q}[X]^{m \times n}$ invertierbare Matrizen $P \in \mathbb{Q}[X]^{m \times m}$ und $Q \in \mathbb{Q}[X]^{n \times n}$ derart, dass sich $PMQ$ in Smithscher Normalform befindet.

(a) $M := \begin{pmatrix} X^2+1 & 1 \\ X^3 & X^4+1 \end{pmatrix}$

(b) $M := \begin{pmatrix} -X & X^2-X-1 & X & X+2 \\ X+1 & -X^2+1 & -X-1 & -X-1 \\ X & -2X^2-X & X^2 & 2X^2+3X \\ 2X+3 & -X^2+X+3 & -X^2-3X-3 & -2X^2-6X-3 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 2:** Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $M \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Sei $r$ der Rang von $M$ aufgefasst als Matrix aus $\mathbb{Q}^{m \times n}$. Für jedes $p \in \mathbb{P}$ bezeichne $M_p \in \mathbb{F}_p^{m \times n}$ die Matrix, die man aus $M$ durch Restklassenbildung der Einträge modulo $(p)$ erhält. Zeige, dass es eine endliche Menge $F \subseteq \mathbb{P}$ gibt mit $\operatorname{rank}(M_p) = r$ für alle $p \in \mathbb{P} \setminus F$.

**Aufgabe 3:** Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Bezeichne $A \in \mathbb{Z}^{n \times 2^n}$ eine Matrix, deren Spalten genau die $2^n$ Vektoren mit Einträgen aus $\{-1, 1\}$ seien.

(a) Begründe ohne Rechnung, warum $AA^T$ nicht von der gewählten Reihenfolge der $\pm 1$-Vektoren abhängt.

(b) Stelle eine Vermutung auf, wie die Matrix $AA^T$ ausschaut und beweise sie.

(c) Berechne mit Hilfe der Formel von Cauchy-Binet die Summe der Quadrate aller Determinanten von $n \times n$-Matrizen mit $\pm 1$-Einträgen.

**Abgabe** bis Freitag, den 13. Juli 2018, um 9:55 Uhr in das Fach Ihres Tutors neben dem Raum F411.