§7.2 Matrizenkalkül

Definition

(auch gültig, wenn K nur ein kommutativer Ring ist!)

Seien $m, n, r \in \mathbb{N}_0$,
$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in K^{m \times n}, B = (b_{jk})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq r} \in K^{n \times r}$.

Definition

(auch gültig, wenn K nur ein kommutativer Ring ist!)

Seien $m, n, r \in \mathbb{N}_0$,
$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in K^{m \times n}, B = (b_{jk})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq r} \in K^{n \times r}$.

Dann ist das Matrizenprodukt $AB = A \cdot B \in K^{m \times r}$ definiert durch

Definition

(auch gültig, wenn K nur ein kommutativer Ring ist!)

Seien $m, n, r \in \mathbb{N}_0$,
$A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \in K^{m \times n}$, $B = (b_{jk})_{1 \le j \le n, 1 \le k \le r} \in K^{n \times r}$.

Dann ist das Matrizenprodukt $AB = A \cdot B \in K^{m \times r}$ definiert durch

$$AB = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right)_{1 \le i \le m, 1 \le k \le r} .$$

Bemerkung

(a) Ist $n = 0$, so ist $AB = 0 \in K^{m \times r}$ die Nullmatrix,

Bemerkung

(a) Ist $n = 0$, so ist $AB = 0 \in K^{m \times r}$ die Nullmatrix, aber $m, r \in \mathbb{N}_0$ können beliebig gewählt werden.

Bemerkung

(a) Ist $n = 0$, so ist $AB = 0 \in K^{m \times r}$ die Nullmatrix, aber $m, r \in \mathbb{N}_0$ können beliebig gewählt werden. Nur in diesem Ausnahmefall müsste man in die Notation $A \cdot B$ eigentlich m und r aufnehmen,

Bemerkung

(a) Ist $n = 0$, so ist $AB = 0 \in K^{m \times r}$ die Nullmatrix, aber $m, r \in \mathbb{N}_0$ können beliebig gewählt werden. Nur in diesem Ausnahmefall müsste man in die Notation $A \cdot B$ eigentlich m und r aufnehmen, aber aus dem Zusammenhang ist ohnehin meist klar, was m und r sein sollen.

Bemerkung

(a) Ist $n = 0$, so ist $AB = 0 \in K^{m \times r}$ die Nullmatrix, aber $m, r \in \mathbb{N}_0$ können beliebig gewählt werden. Nur in diesem Ausnahmefall müsste man in die Notation $A \cdot B$ eigentlich m und r aufnehmen, aber aus dem Zusammenhang ist ohnehin meist klar, was m und r sein sollen.

(b) Damit das Matrixprodukt zweier Matrizen definiert ist, muss die erste Matrix genau so viele Spalten haben, wie die zweite Zeilen hat.

Bemerkung

(a) Ist $n = 0$, so ist $AB = 0 \in K^{m \times r}$ die Nullmatrix, aber $m, r \in \mathbb{N}_0$ können beliebig gewählt werden. Nur in diesem Ausnahmefall müsste man in die Notation $A \cdot B$ eigentlich m und r aufnehmen, aber aus dem Zusammenhang ist ohnehin meist klar, was m und r sein sollen.

(b) Damit das Matrixprodukt zweier Matrizen definiert ist, muss die erste Matrix genau so viele Spalten haben, wie die zweite Zeilen hat. Mit anderen Worten: Die Zeilen der ersten Matrix müssen genauso lang sein, wie die Spalten der zweiten Matrix.

Bemerkung

(a) Ist $n = 0$, so ist $AB = 0 \in K^{m \times r}$ die Nullmatrix, aber $m, r \in \mathbb{N}_0$ können beliebig gewählt werden. Nur in diesem Ausnahmefall müsste man in die Notation $A \cdot B$ eigentlich m und r aufnehmen, aber aus dem Zusammenhang ist ohnehin meist klar, was m und r sein sollen.

(b) Damit das Matrixprodukt zweier Matrizen definiert ist, muss die erste Matrix genau so viele Spalten haben, wie die zweite Zeilen hat. Mit anderen Worten: Die Zeilen der ersten Matrix müssen genauso lang sein, wie die Spalten der zweiten Matrix. Der Eintrag in der i-ten Zeile und k-ten Spalte von AB ist dann das innere Produkt der i-ten Zeile von A mit der k-ten Spalte von B („Zeile mal Spalte“).

Bemerkung

(a) Ist $n = 0$, so ist $AB = 0 \in K^{m \times r}$ die Nullmatrix, aber $m, r \in \mathbb{N}_0$ können beliebig gewählt werden. Nur in diesem Ausnahmefall müsste man in die Notation $A \cdot B$ eigentlich m und r aufnehmen, aber aus dem Zusammenhang ist ohnehin meist klar, was m und r sein sollen.

(b) Damit das Matrixprodukt zweier Matrizen definiert ist, muss die erste Matrix genau so viele Spalten haben, wie die zweite Zeilen hat. Mit anderen Worten: Die Zeilen der ersten Matrix müssen genauso lang sein, wie die Spalten der zweiten Matrix. Der Eintrag in der i-ten Zeile und k-ten Spalte von AB ist dann das innere Produkt der i-ten Zeile von A mit der k-ten Spalte von B („Zeile mal Spalte"). Dabei nennt man $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ für $x, y \in K^n$ das innere Produkt von x und y.

Bemerkung

(c) Sind $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$ die Spalten von B, so sind $Ax^{(1)}, \ldots, Ax^{(r)}$ die Spalten von AB:

$$A(x^{(1)} \ldots x^{(r)}) = (Ax^{(1)} \ldots Ax^{(r)}).$$

Matrizenmultiplikation ist also „simultanes Multiplizieren mit Spaltenvektoren“.

Bemerkung

(c) Sind $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$ die Spalten von B, so sind $Ax^{(1)}, \ldots, Ax^{(r)}$ die Spalten von AB:

$$A(x^{(1)} \ldots x^{(r)}) = (Ax^{(1)} \ldots Ax^{(r)}).$$

Matrizenmultiplikation ist also „simultanes Multiplizieren mit Spaltenvektoren“.

(d) Sind $A \in K^{m\times n}$ und $x_1, \ldots, x_n \in K$, so ist

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\in K^n} = A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\in K^{n\times 1}}.$$

Beispiel

(a) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3 \times \underline{2} \qquad \underline{2} \times 4 \qquad 3 \times 4$$

Beispiel

(a) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3 \times \underline{2} \qquad \underline{2} \times 4 \qquad 3 \times 4$$

(b) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ ist nicht definiert.

$$2 \times \underline{2} \qquad \underline{3} \times 2$$

Beispiel

(a) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3 \times \underline{2} \qquad \underline{2} \times 4 \qquad 3 \times 4$$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht definiert.

$$2 \times \underline{2} \qquad \underline{3} \times 2$$

(c) $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$1 \times \underline{4} \qquad \underline{4} \times 2 \qquad 1 \times 2$$

Lemma

Seien $m, n, r \in \mathbb{N}_0$, $A \in K^{m \times n}$ *und* $B \in K^{n \times r}$. *Dann gilt* $f_{AB} = f_A \circ f_B$.

Lemma

Seien $m, n, r \in \mathbb{N}_0$, $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times r}$. Dann gilt $f_{AB} = f_A \circ f_B$.

Beweis.

Wegen $AB \in K^{m\times r}$ haben wir

$$\begin{tikzcd} K^r \arrow[r, "f_B"] \arrow[rr, bend right, "f_{AB}"'] & K^n \arrow[r, "f_A"] & K^m \end{tikzcd},$$

Lemma

Seien $m, n, r \in \mathbb{N}_0$, $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times r}$. Dann gilt $f_{AB} = f_A \circ f_B$.

Beweis.

Wegen $AB \in K^{m\times r}$ haben wir

$$\begin{tikzcd} K^r \arrow[r, "f_B"] \arrow[rr, bend right, "f_{AB}"'] & K^n \arrow[r, "f_A"] & K^m \end{tikzcd},$$

so dass Definitions- und Zielmengen von f_{AB} und $f_A \circ f_B$ übereinstimmen.

Lemma

Seien $m, n, r \in \mathbb{N}_0$, $A \in K^{m \times n}$ und $B \in K^{n \times r}$. Dann gilt $f_{AB} = f_A \circ f_B$.

Beweis.

Wegen $AB \in K^{m \times r}$ haben wir

$$\begin{tikzcd} K^r \arrow[r, "f_B"] \arrow[rr, bend right, "f_{AB}"'] & K^n \arrow[r, "f_A"] & K^m \end{tikzcd},$$

so dass Definitions- und Zielmengen von f_{AB} und $f_A \circ f_B$ übereinstimmen. Da beide Abbildungen linear sind, reicht es nach 6.3.4, die Gleichheit auf den Standardvektoren $e_k \in K^r$ zu zeigen:

Lemma

Seien $m, n, r \in \mathbb{N}_0$, $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times r}$. Dann gilt $f_{AB} = f_A \circ f_B$.

Beweis.

Wegen $AB \in K^{m\times r}$ haben wir

$$\begin{tikzcd} K^r \arrow[r, "f_B"] \arrow[rr, bend right, "f_{AB}"'] & K^n \arrow[r, "f_A"] & K^m \end{tikzcd},$$

so dass Definitions- und Zielmengen von f_{AB} und $f_A \circ f_B$ übereinstimmen. Da beide Abbildungen linear sind, reicht es nach 6.3.4, die Gleichheit auf den Standardvektoren $e_k \in K^r$ zu zeigen: Sei $k \in \{1, \ldots, r\}$. Zu zeigen ist $(AB)e_k = A(Be_k)$. Da Be_k die k-te Spalte von B ist, ist $A(Be_k)$ die k-te Spalte von AB, welche natürlich $(AB)e_k$ ist. $\square$

Matrizenprodukt entspricht Hintereinanderschaltung von linearen Abbildungen

Satz

Seien U, V, W K-VRe der Dimensionen r, n, m mit geordneten Basen $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$. Seien $U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$ linear. Dann gilt
$M(f \circ g, \underline{u}, \underline{w}) = M(f, \underline{v}, \underline{w}) M(g, \underline{u}, \underline{v})$.

Matrizenprodukt entspricht Hintereinanderschaltung von linearen Abbildungen

Satz

Seien U, V, W K-VRe der Dimensionen r, n, m mit geordneten Basen $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$. Seien $U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$ linear. Dann gilt
$M(f \circ g, \underline{u}, \underline{w}) = M(f, \underline{v}, \underline{w}) M(g, \underline{u}, \underline{v})$.

Beweis.

Setzt man $A := M(f, \underline{v}, \underline{w}) \in K^{m \times n}$, $B := M(g, \underline{u}, \underline{v}) \in K^{n \times r}$, so ist $AB = M(f \circ g, \underline{u}, \underline{w})$ zu zeigen, das heißt $f \circ g = \mathrm{vec}_{\underline{w}} \circ f_{AB} \circ \mathrm{coord}_{\underline{u}}$.

Matrizenprodukt entspricht Hintereinanderschaltung von linearen Abbildungen

Satz

Seien U, V, W K-VRe der Dimensionen r, n, m mit geordneten Basen $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$. Seien $U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$ linear. Dann gilt
$M(f \circ g, \underline{u}, \underline{w}) = M(f, \underline{v}, \underline{w})M(g, \underline{u}, \underline{v})$.

Beweis.

Setzt man $A := M(f, \underline{v}, \underline{w}) \in K^{m \times n}$, $B := M(g, \underline{u}, \underline{v}) \in K^{n \times r}$, so ist $AB = M(f \circ g, \underline{u}, \underline{w})$ zu zeigen, das heißt $f \circ g = \mathrm{vec}_{\underline{w}} \circ f_{AB} \circ \mathrm{coord}_{\underline{u}}$.
Nun gilt aber:

$$f \circ g \quad = \quad (\mathrm{vec}_{\underline{w}} \circ f_A \circ \mathrm{coord}_{\underline{v}}) \circ (\mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ f_B \circ \mathrm{coord}_{\underline{u}})$$

Matrizenprodukt entspricht Hintereinanderschaltung von linearen Abbildungen

Satz

Seien U, V, W K-VRe der Dimensionen r, n, m mit geordneten Basen $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$. Seien $U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$ linear. Dann gilt
$M(f \circ g, \underline{u}, \underline{w}) = M(f, \underline{v}, \underline{w}) M(g, \underline{u}, \underline{v})$.

Beweis.

Setzt man $A := M(f, \underline{v}, \underline{w}) \in K^{m \times n}$, $B := M(g, \underline{u}, \underline{v}) \in K^{n \times r}$, so ist $AB = M(f \circ g, \underline{u}, \underline{w})$ zu zeigen, das heißt $f \circ g = \mathrm{vec}_{\underline{w}} \circ f_{AB} \circ \mathrm{coord}_{\underline{u}}$.
Nun gilt aber:

$$
\begin{aligned}
f \circ g &= (\mathrm{vec}_{\underline{w}} \circ f_A \circ \mathrm{coord}_{\underline{v}}) \circ (\mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ f_B \circ \mathrm{coord}_{\underline{u}}) \\
&= \mathrm{vec}_{\underline{w}} \circ f_A \circ \underbrace{(\mathrm{coord}_{\underline{v}} \circ \mathrm{vec}_{\underline{v}})}_{= \mathrm{id}_{K^n}} \circ f_B \circ \mathrm{coord}_{\underline{u}}
\end{aligned}
$$

Matrizenprodukt entspricht Hintereinanderschaltung von linearen Abbildungen

Satz

Seien U, V, W K-VRe der Dimensionen r, n, m mit geordneten Basen $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$. Seien $U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$ linear. Dann gilt
$M(f \circ g, \underline{u}, \underline{w}) = M(f, \underline{v}, \underline{w}) M(g, \underline{u}, \underline{v})$.

Beweis.

Setzt man $A := M(f, \underline{v}, \underline{w}) \in K^{m \times n}$, $B := M(g, \underline{u}, \underline{v}) \in K^{n \times r}$, so ist $AB = M(f \circ g, \underline{u}, \underline{w})$ zu zeigen, das heißt $f \circ g = \mathrm{vec}_{\underline{w}} \circ f_{AB} \circ \mathrm{coord}_{\underline{u}}$.
Nun gilt aber:

$$
\begin{aligned}
f \circ g &= (\mathrm{vec}_{\underline{w}} \circ f_A \circ \mathrm{coord}_{\underline{v}}) \circ (\mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ f_B \circ \mathrm{coord}_{\underline{u}}) \\
&= \mathrm{vec}_{\underline{w}} \circ f_A \circ \underbrace{(\mathrm{coord}_{\underline{v}} \circ \mathrm{vec}_{\underline{v}})}_{= \mathrm{id}_{K^n}} \circ f_B \circ \mathrm{coord}_{\underline{u}} \\
&= \mathrm{vec}_{\underline{w}} \circ (f_A \circ f_B) \circ \mathrm{coord}_{\underline{u}} =
\end{aligned}
$$

Matrizenprodukt entspricht Hintereinanderschaltung von linearen Abbildungen

Satz

Seien U, V, W K-VRe der Dimensionen r, n, m mit geordneten Basen $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$. Seien $U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$ linear. Dann gilt
$M(f \circ g, \underline{u}, \underline{w}) = M(f, \underline{v}, \underline{w}) M(g, \underline{u}, \underline{v})$.

Beweis.

Setzt man $A := M(f, \underline{v}, \underline{w}) \in K^{m \times n}$, $B := M(g, \underline{u}, \underline{v}) \in K^{n \times r}$, so ist $AB = M(f \circ g, \underline{u}, \underline{w})$ zu zeigen, das heißt $f \circ g = \mathrm{vec}_{\underline{w}} \circ f_{AB} \circ \mathrm{coord}_{\underline{u}}$.
Nun gilt aber:

$$\begin{aligned} f \circ g &= (\mathrm{vec}_{\underline{w}} \circ f_A \circ \mathrm{coord}_{\underline{v}}) \circ (\mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ f_B \circ \mathrm{coord}_{\underline{u}}) \\ &= \mathrm{vec}_{\underline{w}} \circ f_A \circ \underbrace{(\mathrm{coord}_{\underline{v}} \circ \mathrm{vec}_{\underline{v}})}_{= \mathrm{id}_{K^n}} \circ f_B \circ \mathrm{coord}_{\underline{u}} \\ &= \mathrm{vec}_{\underline{w}} \circ (f_A \circ f_B) \circ \mathrm{coord}_{\underline{u}} = \mathrm{vec}_{\underline{w}} \circ f_{AB} \circ \mathrm{coord}_{\underline{u}} \end{aligned}$$

□

Matrizenmultiplikation ist assoziativ

Korollar

Seien $m, n, r, s \in \mathbb{N}_0$, $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times r}$ *und* $C \in K^{r \times s}$. *Dann gilt* $(AB)C = A(BC)$.

Matrizenmultiplikation ist assoziativ

Korollar

Seien $m, n, r, s \in \mathbb{N}_0$, $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times r}$ und $C \in K^{r\times s}$. Dann gilt $(AB)C = A(BC)$.

Beweis.

Bezeichne $\underline{e}^{(\ell)}$ die Standardbasis von K^ℓ für $\ell \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$(AB)C \quad = \quad (M(f_A, \underline{e}^{(n)}, \underline{e}^{(m)})M(f_B, \underline{e}^{(r)}, \underline{e}^{(n)}))M(f_C, \underline{e}^{(s)}, \underline{e}^{(r)})$$

Matrizenmultiplikation ist assoziativ

Korollar
Seien $m, n, r, s \in \mathbb{N}_0$, $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times r}$ und $C \in K^{r \times s}$. Dann gilt $(AB)C = A(BC)$.

Beweis.
Bezeichne $\underline{e}^{(\ell)}$ die Standardbasis von K^ℓ für $\ell \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(AB)C &= (M(f_A, \underline{e}^{(n)}, \underline{e}^{(m)})M(f_B, \underline{e}^{(r)}, \underline{e}^{(n)}))M(f_C, \underline{e}^{(s)}, \underline{e}^{(r)}) \\
&= M(f_A \circ f_B, \underline{e}^{(r)}, \underline{e}^{(m)})M(f_C, \underline{e}^{(s)}, \underline{e}^{(r)})
\end{aligned}$$

Matrizenmultiplikation ist assoziativ

Korollar

Seien $m, n, r, s \in \mathbb{N}_0$, $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times r}$ und $C \in K^{r\times s}$. Dann gilt $(AB)C = A(BC)$.

Beweis.

Bezeichne $\underline{e}^{(\ell)}$ die Standardbasis von K^ℓ für $\ell \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(AB)C &= (M(f_A, \underline{e}^{(n)}, \underline{e}^{(m)})M(f_B, \underline{e}^{(r)}, \underline{e}^{(n)}))M(f_C, \underline{e}^{(s)}, \underline{e}^{(r)}) \\
&= M(f_A \circ f_B, \underline{e}^{(r)}, \underline{e}^{(m)})M(f_C, \underline{e}^{(s)}, \underline{e}^{(r)}) \\
&= M((f_A \circ f_B) \circ f_C, \underline{e}^{(s)}, \underline{e}^{(m)}) \overset{1.2.5(a)}{=} M(f_A \circ (f_B \circ f_C), \underline{e}^{(s)}, \underline{e}^{(m)})
\end{aligned}$$

Matrizenmultiplikation ist assoziativ

Korollar

Seien $m, n, r, s \in \mathbb{N}_0$, $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times r}$ und $C \in K^{r\times s}$. Dann gilt $(AB)C = A(BC)$.

Beweis.

Bezeichne $\underline{e}^{(\ell)}$ die Standardbasis von K^ℓ für $\ell \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(AB)C &= (M(f_A, \underline{e}^{(n)}, \underline{e}^{(m)})M(f_B, \underline{e}^{(r)}, \underline{e}^{(n)}))M(f_C, \underline{e}^{(s)}, \underline{e}^{(r)}) \\
&= M(f_A \circ f_B, \underline{e}^{(r)}, \underline{e}^{(m)})M(f_C, \underline{e}^{(s)}, \underline{e}^{(r)}) \\
&= M((f_A \circ f_B) \circ f_C, \underline{e}^{(s)}, \underline{e}^{(m)}) \stackrel{1.2.5(a)}{=} M(f_A \circ (f_B \circ f_C), \underline{e}^{(s)}, \underline{e}^{(m)}) \\
&= M(f_A, \underline{e}^{(n)}, \underline{e}^{(m)})M(f_B \circ f_C, \underline{e}^{(s)}, \underline{e}^{(n)})
\end{aligned}$$

Matrizenmultiplikation ist assoziativ

Korollar

Seien $m, n, r, s \in \mathbb{N}_0$, $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times r}$ und $C \in K^{r\times s}$. Dann gilt $(AB)C = A(BC)$.

Beweis.

Bezeichne $\underline{e}^{(\ell)}$ die Standardbasis von K^ℓ für $\ell \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(AB)C &= (M(f_A, \underline{e}^{(n)}, \underline{e}^{(m)})M(f_B, \underline{e}^{(r)}, \underline{e}^{(n)}))M(f_C, \underline{e}^{(s)}, \underline{e}^{(r)}) \\
&= M(f_A \circ f_B, \underline{e}^{(r)}, \underline{e}^{(m)})M(f_C, \underline{e}^{(s)}, \underline{e}^{(r)}) \\
&= M((f_A \circ f_B) \circ f_C, \underline{e}^{(s)}, \underline{e}^{(m)}) \overset{1.2.5(a)}{=} M(f_A \circ (f_B \circ f_C), \underline{e}^{(s)}, \underline{e}^{(m)}) \\
&= M(f_A, \underline{e}^{(n)}, \underline{e}^{(m)})M(f_B \circ f_C, \underline{e}^{(s)}, \underline{e}^{(n)}) \\
&= M(f_A, \underline{e}^{(n)}, \underline{e}^{(m)})(M(f_B, \underline{e}^{(r)}, \underline{e}^{(n)})M(f_C, \underline{e}^{(s)}, \underline{e}^{(r)})) = A(BC)
\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung

(a) Man kann für das Korollar auch den folgenden direkten Beweis geben, welcher zeigt, dass es auch richtig bleibt, wenn K nur ein kommutativer Ring ist: Für $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $\ell \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$((AB)C)_{i\ell} \;=\; \sum_{k=1}^{r} (AB)_{ik} C_{k\ell}$$

Bemerkung

(a) Man kann für das Korollar auch den folgenden direkten Beweis geben, welcher zeigt, dass es auch richtig bleibt, wenn K nur ein kommutativer Ring ist: Für $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $\ell \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{i\ell} &= \sum_{k=1}^{r} (AB)_{ik} C_{k\ell} \\ &= \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk} \right) C_{k\ell} \end{aligned}$$

Bemerkung

(a) Man kann für das Korollar auch den folgenden direkten Beweis geben, welcher zeigt, dass es auch richtig bleibt, wenn K nur ein kommutativer Ring ist: Für $i \in \{1, \dots, m\}$ und $\ell \in \{1, \dots, s\}$ gilt

$$\begin{aligned}
((AB)C)_{i\ell} &= \sum_{k=1}^{r} (AB)_{ik} C_{k\ell} \\
&= \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk} \right) C_{k\ell} \\
&= \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk} C_{k\ell}
\end{aligned}$$

Bemerkung

(a) Man kann für das Korollar auch den folgenden direkten Beweis geben, welcher zeigt, dass es auch richtig bleibt, wenn K nur ein kommutativer Ring ist: Für $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $\ell \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\begin{aligned}
((AB)C)_{i\ell} &= \sum_{k=1}^{r} (AB)_{ik} C_{k\ell} \\
&= \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk} \right) C_{k\ell} \\
&= \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk} C_{k\ell} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} A_{ij} B_{jk} C_{k\ell}
\end{aligned}$$

Bemerkung

(a) Man kann für das Korollar auch den folgenden direkten Beweis geben, welcher zeigt, dass es auch richtig bleibt, wenn K nur ein kommutativer Ring ist: Für $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $\ell \in \{1, \ldots, s\}$ gilt

$$\begin{aligned}
((AB)C)_{i\ell} &= \sum_{k=1}^{r} (AB)_{ik} C_{k\ell} \\
&= \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk} \right) C_{k\ell} \\
&= \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk} C_{k\ell} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} A_{ij} B_{jk} C_{k\ell} \\
&= \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \sum_{k=1}^{r} B_{jk} C_{k\ell} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} (BC)_{j\ell} = (A(BC))_{i\ell}.
\end{aligned}$$

Bemerkung

(b) Aus 7.1.7 und 7.1.8 folgt, dass für alle $m, n, r \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\forall A, B \in K^{m\times n} : \forall C \in K^{n\times r} : (A + B)C = AC + BC,$$
$$\forall A \in K^{m\times n} : \forall B, C \in K^{n\times r} : A(B + C) = AB + AC \qquad \text{und}$$
$$\forall \lambda \in K : \forall A \in K^{m\times n} : \forall B \in K^{n\times r} : (\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B).$$

Bemerkung

(b) Aus 7.1.7 und 7.1.8 folgt, dass für alle $m, n, r \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\forall A, B \in K^{m\times n} : \forall C \in K^{n\times r} : (A+B)C = AC + BC,$$
$$\forall A \in K^{m\times n} : \forall B, C \in K^{n\times r} : A(B+C) = AB + AC \qquad \text{und}$$
$$\forall \lambda \in K : \forall A \in K^{m\times n} : \forall B \in K^{n\times r} : (\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B).$$

Dies kann man aber auch direkt nachrechnen

Bemerkung

(b) Aus 7.1.7 und 7.1.8 folgt, dass für alle $m, n, r \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\forall A, B \in K^{m\times n} : \forall C \in K^{n\times r} : (A + B)C = AC + BC,$$
$$\forall A \in K^{m\times n} : \forall B, C \in K^{n\times r} : A(B + C) = AB + AC \qquad \text{und}$$
$$\forall \lambda \in K : \forall A \in K^{m\times n} : \forall B \in K^{n\times r} : (\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B).$$

Dies kann man aber auch direkt nachrechnen und zwar sogar dann, wenn K nur ein kommutativer Ring statt ein Körper ist,

Bemerkung

(b) Aus 7.1.7 und 7.1.8 folgt, dass für alle $m, n, r \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\forall A, B \in K^{m\times n} : \forall C \in K^{n\times r} : (A+B)C = AC + BC,$$
$$\forall A \in K^{m\times n} : \forall B, C \in K^{n\times r} : A(B+C) = AB + AC \qquad \text{und}$$
$$\forall \lambda \in K : \forall A \in K^{m\times n} : \forall B \in K^{n\times r} : (\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B).$$

Dies kann man aber auch direkt nachrechnen und zwar sogar dann, wenn K nur ein kommutativer Ring statt ein Körper ist, wobei man dann λA für $\lambda \in K$ und $A \in K^{m\times n}$ analog zu 7.1.5 „eintragweise“ definiert

Bemerkung

(b) Aus 7.1.7 und 7.1.8 folgt, dass für alle $m, n, r \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\forall A, B \in K^{m\times n} : \forall C \in K^{n\times r} : (A + B)C = AC + BC,$$
$$\forall A \in K^{m\times n} : \forall B, C \in K^{n\times r} : A(B + C) = AB + AC \qquad \text{und}$$
$$\forall \lambda \in K : \forall A \in K^{m\times n} : \forall B \in K^{n\times r} : (\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B).$$

Dies kann man aber auch direkt nachrechnen und zwar sogar dann, wenn K nur ein kommutativer Ring statt ein Körper ist, wobei man dann λA für $\lambda \in K$ und $A \in K^{m\times n}$ analog zu 7.1.5 „eintragweise“ definiert (und $A + B$ für $A, B \in K^{m\times n}$ schon durch 2.1.11 genauso wie in 7.1.5 „eintragweise“ definiert ist).

Bemerkung

(b) Aus 7.1.7 und 7.1.8 folgt, dass für alle $m, n, r \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\forall A, B \in K^{m\times n} : \forall C \in K^{n\times r} : (A+B)C = AC + BC,$$
$$\forall A \in K^{m\times n} : \forall B, C \in K^{n\times r} : A(B+C) = AB + AC \qquad \text{und}$$
$$\forall \lambda \in K : \forall A \in K^{m\times n} : \forall B \in K^{n\times r} : (\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B).$$

Dies kann man aber auch direkt nachrechnen und zwar sogar dann, wenn K nur ein kommutativer Ring statt ein Körper ist, wobei man dann λA für $\lambda \in K$ und $A \in K^{m\times n}$ analog zu 7.1.5 „eintragweise" definiert (und $A+B$ für $A, B \in K^{m\times n}$ schon durch 2.1.11 genauso wie in 7.1.5 „eintragweise" definiert ist).

(c) Beim Multiplizieren von mehreren Matrizen kann man auf Klammern verzichten [$\to$2.1.7].

Beispiel

Seien $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Dann $R_{\varphi+\psi} = R_\varphi \circ R_\psi$ und daher
$M(R_{\varphi+\psi}, \underline{e}) = M(R_\varphi, \underline{e}) M(R_\psi, \underline{e})$,

Beispiel

Seien $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Dann $R_{\varphi+\psi} = R_\varphi \circ R_\psi$ und daher $M(R_{\varphi+\psi}, \underline{e}) = M(R_\varphi, \underline{e})M(R_\psi, \underline{e})$, was mit 7.1.4(a) heißt

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

Beispiel

Seien $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Dann $R_{\varphi+\psi} = R_\varphi \circ R_\psi$ und daher $M(R_{\varphi+\psi}, \underline{e}) = M(R_\varphi, \underline{e}) M(R_\psi, \underline{e})$, was mit 7.1.4(a) heißt

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos\varphi)(\cos\psi) - (\sin\varphi)(\sin\psi) & -(\cos\varphi)(\sin\psi) - (\sin\varphi)(\cos\psi) \\ (\sin\varphi)(\cos\psi) + (\cos\varphi)(\sin\psi) & -(\sin\varphi)(\sin\psi) + (\cos\varphi)(\cos\psi) \end{pmatrix}.$$

Beispiel

Seien $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Dann $R_{\varphi+\psi} = R_\varphi \circ R_\psi$ und daher $M(R_{\varphi+\psi}, \underline{e}) = M(R_\varphi, \underline{e})M(R_\psi, \underline{e})$, was mit 7.1.4(a) heißt

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos\varphi)(\cos\psi) - (\sin\varphi)(\sin\psi) & -(\cos\varphi)(\sin\psi) - (\sin\varphi)(\cos\psi) \\ (\sin\varphi)(\cos\psi) + (\cos\varphi)(\sin\psi) & -(\sin\varphi)(\sin\psi) + (\cos\varphi)(\cos\psi) \end{pmatrix}.$$

Beispiel

Seien $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Dann $R_{\varphi+\psi} = R_\varphi \circ R_\psi$ und daher $M(R_{\varphi+\psi}, \underline{e}) = M(R_\varphi, \underline{e}) M(R_\psi, \underline{e})$, was mit 7.1.4(a) heißt

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos\varphi)(\cos\psi) - (\sin\varphi)(\sin\psi) & -(\cos\varphi)(\sin\psi) - (\sin\varphi)(\cos\psi) \\ (\sin\varphi)(\cos\psi) + (\cos\varphi)(\sin\psi) & -(\sin\varphi)(\sin\psi) + (\cos\varphi)(\cos\psi) \end{pmatrix}.$$

Beispiel

Seien $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Dann $R_{\varphi+\psi} = R_\varphi \circ R_\psi$ und daher $M(R_{\varphi+\psi}, \underline{e}) = M(R_\varphi, \underline{e}) M(R_\psi, \underline{e})$, was mit 7.1.4(a) heißt

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos\varphi)(\cos\psi) - (\sin\varphi)(\sin\psi) & -(\cos\varphi)(\sin\psi) - (\sin\varphi)(\cos\psi) \\ (\sin\varphi)(\cos\psi) + (\cos\varphi)(\sin\psi) & -(\sin\varphi)(\sin\psi) + (\cos\varphi)(\cos\psi) \end{pmatrix}.$$

Es folgen die Additionstheoreme

$$\cos(\varphi+\psi) = (\cos\varphi)(\cos\psi) - (\sin\varphi)(\sin\psi) \text{ und}$$
$$\sin(\varphi+\psi) = (\sin\varphi)(\cos\psi) + (\cos\varphi)(\sin\psi).$$

Definition und Proposition

(auch falls K nur ein kommutativer Ring statt einem Körper)
Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

die Einheitsmatrix der Größe n.

Definition und Proposition

(auch falls K nur ein kommutativer Ring statt einem Körper)
Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

die Einheitsmatrix der Größe n. Falls n aus dem Zusammenhang klar ist, schreibt man oft I statt I_n.

Definition und Proposition

(auch falls K nur ein kommutativer Ring statt einem Körper)
Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

die Einheitsmatrix der Größe n. Falls n aus dem Zusammenhang klar ist, schreibt man oft I statt I_n. Man überprüft sofort
$\forall A \in K^{m \times n} : AI_n = A$ und $\forall B \in K^{n \times r} : I_n B = B$.

Definition und Proposition

(auch falls K nur ein kommutativer Ring statt einem Körper)
Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

die Einheitsmatrix der Größe n. Falls n aus dem Zusammenhang klar ist, schreibt man oft I statt I_n. Man überprüft sofort
$\forall A \in K^{m \times n} : AI_n = A$ und $\forall B \in K^{n \times r} : I_n B = B$.
Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt invertierbar (falls K ein Körper auch regulär), wenn es ein $B \in K^{n \times n}$ gibt mit

$$AB = I_n = BA.$$

Definition und Proposition

(auch falls K nur ein kommutativer Ring statt einem Körper)
Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

die Einheitsmatrix der Größe n. Falls n aus dem Zusammenhang klar ist, schreibt man oft I statt I_n. Man überprüft sofort
$\forall A \in K^{m \times n} : AI_n = A$ und $\forall B \in K^{n \times r} : I_n B = B$.
Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt invertierbar (falls K ein Körper auch regulär), wenn es ein $B \in K^{n \times n}$ gibt mit

$$AB = I_n = BA.$$

In diesem Fall ist B eindeutig bestimmt und heißt die zu A inverse Matrix, in Zeichen A^{-1}.

Definition und Proposition

(auch falls K nur ein kommutativer Ring statt einem Körper)
Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

die Einheitsmatrix der Größe n. Falls n aus dem Zusammenhang klar ist, schreibt man oft I statt I_n. Man überprüft sofort
$\forall A \in K^{m \times n} : AI_n = A$ und $\forall B \in K^{n \times r} : I_n B = B$.
Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt invertierbar (falls K ein Körper auch regulär), wenn es ein $B \in K^{n \times n}$ gibt mit

$$AB = I_n = BA.$$

In diesem Fall ist B eindeutig bestimmt (hat B' dieselben Eigenschaften, so $B' = B' I_n = B' AB = I_n B = B$) und heißt die zu A inverse Matrix, in Zeichen A^{-1}.

Proposition

Seien V ein VR mit Basis $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $f \colon V \to V$ linear. Dann $M(f, \underline{v}) = I_n \iff f = \mathrm{id}_V$.

Proposition

Seien V ein VR mit Basis $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $f\colon V \to V$ linear.
Dann $M(f, \underline{v}) = I_n \iff f = \mathrm{id}_V$.

Beweis.

$$M(f, \underline{v}) = I_n \quad \overset{7.1.1}{\iff} \quad f = \mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ \underbrace{f_{I_n}}_{=\mathrm{id}_{K^n}} \circ \mathrm{coord}_{\underline{v}}$$

Proposition

Seien V ein VR mit Basis $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $f \colon V \to V$ linear. Dann $M(f, \underline{v}) = I_n \iff f = \mathrm{id}_V$.

Beweis.

$$M(f, \underline{v}) = I_n \quad \overset{7.1.1}{\iff} \quad f = \mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ \underbrace{f_{I_n}}_{=\mathrm{id}_{K^n}} \circ \, \mathrm{coord}_{\underline{v}}$$

$$\iff \quad f = \underbrace{\mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ \mathrm{coord}_{\underline{v}}}_{\mathrm{id}_V}$$

□

Proposition

Seien V und W K-VRe mit Basen $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_n)$. Sei $f \colon V \to W$ linear. Dann ist $M(f, \underline{v}, \underline{w})$ invertierbar genau dann, wenn f bijektiv ist,

Proposition

Seien V und W K-VRe mit Basen $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\underline{w} = (w_1, \dots, w_n)$. Sei $f\colon V \to W$ linear. Dann ist $M(f, \underline{v}, \underline{w})$ invertierbar genau dann, wenn f bijektiv ist, und in diesem Fall gilt

$$M(f, \underline{v}, \underline{w})^{-1} = M(f^{-1}, \underline{w}, \underline{v}).$$

Beweis.

Ist f bijektiv, so gilt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_W$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V$, also

$$I_n = M(f \circ f^{-1}, \underline{w}, \underline{w}) = M(f, \underline{v}, \underline{w}) M(f^{-1}, \underline{w}, \underline{v}) \text{ und}$$
$$I_n = M(f^{-1} \circ f, \underline{v}, \underline{v}) = M(f^{-1}, \underline{w}, \underline{v}) M(f, \underline{v}, \underline{w}),$$

Proposition

Seien V und W K-VRe mit Basen $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_n)$. Sei $f\colon V \to W$ linear. Dann ist $M(f, \underline{v}, \underline{w})$ invertierbar genau dann, wenn f bijektiv ist, und in diesem Fall gilt

$$M(f, \underline{v}, \underline{w})^{-1} = M(f^{-1}, \underline{w}, \underline{v}).$$

Beweis.

Ist f bijektiv, so gilt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_W$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V$, also

$$\begin{aligned} I_n &= M(f \circ f^{-1}, \underline{w}, \underline{w}) = M(f, \underline{v}, \underline{w}) M(f^{-1}, \underline{w}, \underline{v}) \text{ und} \\ I_n &= M(f^{-1} \circ f, \underline{v}, \underline{v}) = M(f^{-1}, \underline{w}, \underline{v}) M(f, \underline{v}, \underline{w}), \end{aligned}$$

das heißt $M(f, \underline{v}, \underline{w})$ ist invertierbar mit $M(f, \underline{v}, \underline{w})^{-1} = M(f^{-1}, \underline{w}, \underline{v})$.

Proposition

Seien V und W K-VRe mit Basen $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_n)$. Sei $f \colon V \to W$ linear. Dann ist $M(f, \underline{v}, \underline{w})$ invertierbar genau dann, wenn f bijektiv ist, und in diesem Fall gilt

$$M(f, \underline{v}, \underline{w})^{-1} = M(f^{-1}, \underline{w}, \underline{v}).$$

Beweis.

Ist f bijektiv, so gilt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_W$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V$, also

$$I_n = M(f \circ f^{-1}, \underline{w}, \underline{w}) = M(f, \underline{v}, \underline{w}) M(f^{-1}, \underline{w}, \underline{v}) \text{ und}$$
$$I_n = M(f^{-1} \circ f, \underline{v}, \underline{v}) = M(f^{-1}, \underline{w}, \underline{v}) M(f, \underline{v}, \underline{w}),$$

das heißt $M(f, \underline{v}, \underline{w})$ ist invertierbar mit $M(f, \underline{v}, \underline{w})^{-1} = M(f^{-1}, \underline{w}, \underline{v})$.
Sei nun umgekehrt $A := M(f, \underline{v}, \underline{w})$ invertierbar, etwa $B \in K^{n \times n}$ mit $AB = I_n = BA$.

Proposition

Seien V und W K-VRe mit Basen $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_n)$. Sei $f \colon V \to W$ linear. Dann ist $M(f, \underline{v}, \underline{w})$ invertierbar genau dann, wenn f bijektiv ist, und in diesem Fall gilt

$$M(f, \underline{v}, \underline{w})^{-1} = M(f^{-1}, \underline{w}, \underline{v}).$$

Beweis.

Ist f bijektiv, so gilt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_W$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V$, also

$$I_n = M(f \circ f^{-1}, \underline{w}, \underline{w}) = M(f, \underline{v}, \underline{w}) M(f^{-1}, \underline{w}, \underline{v}) \text{ und}$$
$$I_n = M(f^{-1} \circ f, \underline{v}, \underline{v}) = M(f^{-1}, \underline{w}, \underline{v}) M(f, \underline{v}, \underline{w}),$$

das heißt $M(f, \underline{v}, \underline{w})$ ist invertierbar mit $M(f, \underline{v}, \underline{w})^{-1} = M(f^{-1}, \underline{w}, \underline{v})$.
Sei nun umgekehrt $A := M(f, \underline{v}, \underline{w})$ invertierbar, etwa $B \in K^{n \times n}$ mit $AB = I_n = BA$. Dann gilt für $g := \mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ f_B \circ \mathrm{coord}_{\underline{w}} \colon W \to V$:
$g \circ f = \mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ f_B \circ f_A \circ \mathrm{coord}_{\underline{v}} = \mathrm{id}_V$, $f \circ g = \mathrm{vec}_{\underline{w}} \circ f_A \circ f_B \circ \mathrm{coord}_{\underline{w}} = \mathrm{id}_W$,

Proposition

Seien V und W K-VRe mit Basen $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_n)$. Sei $f\colon V \to W$ linear. Dann ist $M(f, \underline{v}, \underline{w})$ invertierbar genau dann, wenn f bijektiv ist, und in diesem Fall gilt

$$M(f, \underline{v}, \underline{w})^{-1} = M(f^{-1}, \underline{w}, \underline{v}).$$

Beweis.

Ist f bijektiv, so gilt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_W$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V$, also

$$\begin{aligned} I_n &= M(f \circ f^{-1}, \underline{w}, \underline{w}) = M(f, \underline{v}, \underline{w}) M(f^{-1}, \underline{w}, \underline{v}) \text{ und} \\ I_n &= M(f^{-1} \circ f, \underline{v}, \underline{v}) = M(f^{-1}, \underline{w}, \underline{v}) M(f, \underline{v}, \underline{w}), \end{aligned}$$

das heißt $M(f, \underline{v}, \underline{w})$ ist invertierbar mit $M(f, \underline{v}, \underline{w})^{-1} = M(f^{-1}, \underline{w}, \underline{v})$.
Sei nun umgekehrt $A := M(f, \underline{v}, \underline{w})$ invertierbar, etwa $B \in K^{n \times n}$ mit $AB = I_n = BA$. Dann gilt für $g := \mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ f_B \circ \mathrm{coord}_{\underline{w}}\colon W \to V$:
$g \circ f = \mathrm{vec}_{\underline{v}} \circ f_B \circ f_A \circ \mathrm{coord}_{\underline{v}} = \mathrm{id}_V$, $f \circ g = \mathrm{vec}_{\underline{w}} \circ f_A \circ f_B \circ \mathrm{coord}_{\underline{w}} = \mathrm{id}_W$,
da $f_B \circ f_A = f_{BA} = f_{I_n} = \mathrm{id}_{K^n}$ und $f_A \circ f_B = f_{AB} = f_{I_n} = \mathrm{id}_{K^n}$.
Aus 1.2.6 folgt, dass dann f bijektiv ist. $\square$

Proposition

Seien V und W endlichdimensionale K-VRe derselben Dimension und $f\colon V \to W$ linear. Dann gilt

$$f \text{ injektiv} \iff f \text{ bijektiv} \iff f \text{ surjektiv.}$$

Proposition

Seien V und W endlichdimensionale K-VRe derselben Dimension und $f \colon V \to W$ linear. Dann gilt

$$f \text{ injektiv} \iff f \text{ bijektiv} \iff f \text{ surjektiv.}$$

Beweis.

Wähle eine Basis $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V.

Proposition

Seien V und W endlichdimensionale K-VRe derselben Dimension und $f\colon V \to W$ linear. Dann gilt

$$f \text{ injektiv} \iff f \text{ bijektiv} \iff f \text{ surjektiv.}$$

Beweis.

Wähle eine Basis $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V. Nach 6.3.8 gilt:

$$\begin{aligned}
f \text{ injektiv} &\iff f(v_1), \ldots, f(v_n) \text{ linear unabhängig in } W,\\
f \text{ bijektiv} &\iff f(v_1), \ldots, f(v_n) \text{ bilden Basis von } W,\\
f \text{ surjektiv} &\iff f(v_1), \ldots, f(v_n) \text{ spannen } W \text{ auf.}
\end{aligned}$$

Proposition

Seien V und W endlichdimensionale K-VRe derselben Dimension und $f: V \to W$ linear. Dann gilt

$$f \text{ injektiv} \iff f \text{ bijektiv} \iff f \text{ surjektiv.}$$

Beweis.

Wähle eine Basis $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V. Nach 6.3.8 gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv} &\iff f(v_1), \ldots, f(v_n) \text{ linear unabhängig in } W, \\ f \text{ bijektiv} &\iff f(v_1), \ldots, f(v_n) \text{ bilden Basis von } W, \\ f \text{ surjektiv} &\iff f(v_1), \ldots, f(v_n) \text{ spannen } W \text{ auf.} \end{aligned}$$

Wegen $\dim W = n$ sind nach 6.2.26 die rechts stehenden Bedingungen aber äquivalent. $\square$

Satz

Seien $A, B \in K^{n\times n}$. *Dann* $AB = I_n \iff BA = I_n$.

Satz

Seien $A, B \in K^{n\times n}$. Dann $AB = I_n \iff BA = I_n$.

Beweis.

Wegen Symmetrie reicht es zu „$\Longrightarrow$“ zu zeigen. Gelte hierzu $AB = I_n$.

Satz

Seien $A, B \in K^{n\times n}$. *Dann* $AB = I_n \iff BA = I_n$.

Beweis.

Wegen Symmetrie reicht es zu „ $\Longrightarrow$ “ zu zeigen. Gelte hierzu $AB = I_n$. Dann $f_A \circ f_B = f_{AB} = f_{I_n} = \mathrm{id}_{K^n}$, woraus folgt, dass f_B injektiv ist.

Satz

Seien $A, B \in K^{n\times n}$. Dann $AB = I_n \iff BA = I_n$.

Beweis.

Wegen Symmetrie reicht es zu „ $\implies$ “ zu zeigen. Gelte hierzu $AB = I_n$. Dann $f_A \circ f_B = f_{AB} = f_{I_n} = \mathrm{id}_{K^n}$, woraus folgt, dass f_B injektiv ist. Es folgt, dass f_B bijektiv ist, woraus man die Invertierbarkeit von B erhält.

Satz

Seien $A, B \in K^{n\times n}$. *Dann* $AB = I_n \iff BA = I_n$.

Beweis.

Wegen Symmetrie reicht es zu „$\implies$“ zu zeigen. Gelte hierzu $AB = I_n$. Dann $f_A \circ f_B = f_{AB} = f_{I_n} = \mathrm{id}_{K^n}$, woraus folgt, dass f_B injektiv ist. Es folgt, dass f_B bijektiv ist, woraus man die Invertierbarkeit von B erhält. Damit gilt

$$BA = BA(BB^{-1}) = B(AB)B^{-1} = BB^{-1} = I_n.$$

$\square$

Satz

Seien $A, B \in K^{n \times n}$. Dann $AB = I_n \iff BA = I_n$.

Beweis.

Wegen Symmetrie reicht es zu „$\Longrightarrow$“ zu zeigen. Gelte hierzu $AB = I_n$. Dann $f_A \circ f_B = f_{AB} = f_{I_n} = \mathrm{id}_{K^n}$, woraus folgt, dass f_B injektiv ist. Es folgt, dass f_B bijektiv ist, woraus man die Invertierbarkeit von B erhält. Damit gilt

$$BA = BA(BB^{-1}) = B(AB)B^{-1} = BB^{-1} = I_n.$$

□

Korollar

Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann ist A invertierbar genau dann, wenn es

$$x^{(1)}, \ldots, x^{(n)} \in K^n$$

gibt mit $Ax^{(j)} = e_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Satz

Seien $A, B \in K^{n \times n}$. Dann $AB = I_n \iff BA = I_n$.

Beweis.

Wegen Symmetrie reicht es zu „ $\implies$ “ zu zeigen. Gelte hierzu $AB = I_n$. Dann $f_A \circ f_B = f_{AB} = f_{I_n} = \mathrm{id}_{K^n}$, woraus folgt, dass f_B injektiv ist. Es folgt, dass f_B bijektiv ist, woraus man die Invertierbarkeit von B erhält. Damit gilt

$$BA = BA(BB^{-1}) = B(AB)B^{-1} = BB^{-1} = I_n.$$

$\square$

Korollar

Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann ist A invertierbar genau dann, wenn es

$$x^{(1)}, \ldots, x^{(n)} \in K^n$$

gibt mit $Ax^{(j)} = e_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. In diesem Fall sind $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ eindeutig bestimmt und $x^{(j)}$ ist die j-te Spalte von A^{-1}.