Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Sabine Burgdorf
Markus Schweighofer

Übungsblatt 6 zur Einführung in die Algebra

Abgabe bis Montag, den 4. Dezember 2017, 11.44 Uhr in die Briefkästen auf F4.

Aufgabe 19

Sei A ein kommutativer Ring und $S \subseteq A$ eine multiplikative Menge ohne Nullteiler von A. Zeige, dass die Relation $\sim$ auf $A \times S$, gegeben durch

$$(a,s) \sim (b,t) :\Leftrightarrow at = bs \qquad (a,b \in A,\ s,t \in S)$$

eine Äquivalenzrelation ist. Zeige weiter, dass $(A \times S)/_\sim$ vermöge

$$\widetilde{(a,s)} + \widetilde{(b,t)} := \widetilde{(at+bs, st)} \text{ und } \widetilde{(a,s)} \cdot \widetilde{(b,t)} := \widetilde{(ab,st)}$$

$(a,b \in A,\ s,t \in S)$ zu einem kommutativen Ring mit $0 = \widetilde{(0,1)}$ und $1 = \widetilde{(1,1)}$ wird.

Aufgabe 20

Beweise Satz 2.3.7 aus der Vorlesung: Sei A ein Unterring des kommutativen Ringes B, sei $S \subseteq A \cap B^\times$ multiplikativ und $B = S^{-1}A$. Sei C ein weiterer Ring und $\varphi\colon A \to C$ ein Homomorphismus. Genau dann gibt es einen Homomorphismus $\psi\colon S^{-1}A \to C$ mit $\psi|_A = \varphi$, wenn $\varphi(S) \subseteq C^\times$. In diesem Fall ist ψ eindeutig bestimmt, denn es gilt $\psi\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)}$ für $a \in A$ und $s \in S$.

Aufgabe 21

Zeige, dass die Lokalisierungen A_S des kommutativen Ringes $A := \mathbb{Z}/(6)$ nach beliebigen multiplikativen Teilmengen S von A bis auf Isomorphie genau die folgenden Ringe sind: $\mathbb{Z}/(1)$, $\mathbb{Z}/(2)$, $\mathbb{Z}/(3)$, $\mathbb{Z}/(6)$.

Aufgabe F

Sei K ein Körper. Zu jedem Polynom $p \in K[X]$ definieren wir

$$\widehat{p}\colon K \to K,\ x \mapsto p(x).$$

Zeige:

(a) Die Abbildung $\varrho\colon K[X] \to K^K, p \mapsto \widehat{p}$ ist ein Ringhomomorphismus.
(b) Besitzt K unendlich viele Elemente, dann ist ϱ injektiv, aber nicht surjektiv.
(c) Ist K endlich, dann ist ϱ surjektiv, aber nicht injektiv.