Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Sabine Burgdorf
Markus Schweighofer

Übungsblatt 2 zur Einführung in die Algebra

Abgabe bis Montag, den 6. November 2017, 11.44 Uhr in die Briefkästen auf F4.

Aufgabe 5

Gib konkrete Einbettungen von C_4 und von V in S_4 an.

Aufgabe 6

Zeige, dass es bis auf Isomorphie genau zwei Gruppen der Ordnung 4 gibt.

Aufgabe 7

Betrachte die durch

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ und } g(x) = \frac{x-1}{x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\})$$

definierten Permutationen von $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Zeige, dass die von f und g erzeugte Untergruppe von $S_{\mathbb{R}\setminus\{0,1\}}$ isomorph zu S_3 ist.

Aufgabe 8

Seien $(G,\cdot)$, und $(H,+)$ Gruppen, wobei H abelsch ist. Bezeichne $\mathrm{Hom}(G,H)$ die Menge aller (Gruppen-)Homomorphismen $f\colon G \to H$. Wir definieren auf $\mathrm{Hom}(G,H)$ die Verknüpfung $+$ durch $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ für alle $x \in G$ und $f,g \in \mathrm{Hom}(G,H)$. Zeige, dass $\mathrm{Hom}(G,H)$ mit dieser Verknüpfung eine abelsche Gruppe ist. Ist dies immer noch wahr, wenn H nicht abelsch ist?

Aufgabe B

Sei F eine Gruppe und S eine Teilmenge von F. Die Gruppe F heißt *frei* über S, wenn die folgende universelle Eigenschaft gilt: Für jede Gruppe G und jede Abbildung $\varphi\colon S \to G$ existiert ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $\overline{\varphi}\colon F \to G$, welcher φ fortsetzt, d.h. es ist $\overline{\varphi}(s) = \varphi(s)$ für alle $s \in S$.

(a) Zeige, dass $(\mathbb{Z},+)$ frei ist über $\{1\}$.
(b) Zeige, dass $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},+)$ nicht frei ist über $\{(1,0),(0,1)\}$.