Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Sabine Burgdorf
Markus Schweighofer

Übungsblatt 12 zur Einführung in die Algebra

Abgabe bis Montag, den 29. Januar 2018, 11.44 Uhr in die Briefkästen auf F4.

Aufgabe 41b

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung. Zeige: $L|K$ ist genau dann algebraisch, wenn jeder Unterring R von L, der K enthält, ein Körper ist.

Aufgabe 42

Sei E ein Zwischenkörper der Körpererweiterung $L|K$. Zeige oder widerlege durch ein Gegenbeispiel:

(a) Ist $L|K$ normal, so ist auch $L|E$ normal.
(b) Ist $L|K$ normal, so ist auch $E|K$ normal.
(c) Sind $L|E$ und $E|K$ normal, so ist auch $L|K$ normal.

Aufgabe 43 (zählt doppelt)

Für jede Teilmenge M der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\mathring{\imath} \cong \mathbb{R}^2$ sei

$\mathrm{Ge}(M)$	$=$	Menge der Geraden, die zwei verschiedene Punkte von M enthalten
$\mathrm{Kr}(M)$	$=$	Menge der Kreise, deren Mittelpunkt in M liegt und deren Radius gleich dem Abstand zweier Punkte aus M ist.

Wir betrachten dann die folgenden *elementaren Konstruktionsschritte*:

($\times$) Schnitt zweier verschiedener Geraden aus $\mathrm{Ge}(M)$
($\varnothing$) Schnitt einer Geraden aus $\mathrm{Ge}(M)$ mit einem Kreis aus $\mathrm{Kr}(M)$
(⚭) Schnitt zweier verschiedener Kreise aus $\mathrm{Kr}(M)$.

Für jede Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ sei $M' \subseteq \mathbb{C}$ die Menge M vereinigt mit den Schnittpunkten, die man durch Anwendung von ($\times$), ($\varnothing$) und (⚭) erhalten kann. Man nennt die Elemente von M' die in einem Schritt aus M konstruierbaren Punkte. Nun definieren wir für $M \subseteq \mathbb{C}$ induktiv die Menge $M^{(n)}$ der in n Schritten ($n \in \mathbb{N}_0$) aus M konstruierbaren Punkte durch $M^{(0)} := M$ und $M^{(n+1)} := (M^{(n)})'$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Schließlich sagen wir, die Punkte aus

$$\curlywedge M := \bigcup\{M^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

sind *mit Zirkel und Lineal aus M konstruierbar*. Zeige durch geometrische Konstruktionen (stichpunktartig kommentierte Skizzen), dass für jedes $M \subseteq \mathbb{C}$ mit $\{0,1\} \subseteq M$, die Menge $\curlywedge M$ einen Zwischenkörper von $\mathbb{C}|\mathbb{Q}(\mathring{\imath})$ bildet.

Aufgabe M

(a) Bestimme den Zerfällungskörper L der folgenden Polynome über $\mathbb{Q}$ sowie den entsprechenden Körpergrad von $L|\mathbb{Q}$. (Dabei soll der Zerfällungskörper in möglichst einfacher Form angegeben werden.)
   (i) $f = X^5 - 1$
   (ii) $g = X^3 - 2$
   (iii) $h = X^4 - 2X^2 - 2$

(b) Finde den Zerfällungskörper L von X^2+X+1 über $\mathbb{F}_2$. Was ist der Körpergrad von $L|\mathbb{F}_2$?