Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Sabine Burgdorf
Markus Schweighofer
20. August 2018

Nachklausur zur Linearen Algebra I

Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Übungsgruppenleiter in der Linearen Algebra I:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
erreichte Punktzahl										
Korrektor (Initialen)										
Maximalpunktzahl	14	15	20	8	13	7	7	6	10	100

Fasse den Klausurbogen nicht an, bevor die Klausur eröffnet wird!

Entferne nicht die Klammerung der Blätter. Sobald die Klausur eröffnet wird, trage auf **jeder Vorderseite sofort** Deinen Namen ein. Schreibe die Lösung zu einer Aufgabe nur auf die dafür vorgesehenen Blätter. Wenn Du noch genug Zeit hast, empfiehlt es sich, die Lösung zunächst auf Schmierpapier zu schreiben. Vergiss aber nicht, die Lösung rechtzeitig auf den Klausurbogen zu übertragen.

Bei Manipulation von Matrizen sind die durchgeführten Spalten- oder Zeilenoperationen stets anzugeben (im Stile der Vorlesung oder ähnlich, also etwa $Z_2 \leftrightarrow Z_4$ für Vertauschung der Zeilen 2 und 4 oder $Z_1 \leftarrow Z_1 - 7Z_2$ für Subtrahieren des 7-fachen der Zeile 2 von der Zeile 1). Zögere bei Fragen nicht, Dich (möglichst lautlos) bemerkbar zu machen.

Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten. Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind Schreibzeug, Schmierpapier[1] und eine Uhr[2]. Viel Erfolg!

[1]anfangs unbeschrieben
[2]ohne eingebaute Kommunikationsgeräte

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 1**

---

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 1 (Multiple-Choice, ohne Begründung, 14 Punkte). Schreibe für die folgenden 7 Fragen jeweils die Nummer aller richtigen Antworten unter die jeweilige Frage. Pro Frage sind 2 Punkte zu erreichen. Diese gibt es, wenn genau die richtigen Antworten angegeben sind. Ist nicht jede richtige Antwort, aber mindestens eine richtige und *gleichzeitig keine falsche* Antwort angegeben, so gibt es 1 Punkt. Andernfalls gibt es null Punkte. Es muss und soll **keine Begründung** gegeben werden.

(a) Für alle endlichen Mengen A und B gilt:

(1) $\#A \leq \#B$ oder $\#B \leq \#A$

(2) $\#A = \#B \implies A = B$

(3) $A = \{B\} \implies B \subseteq A$

(4) $A \in \{B, B\} \implies A = B$

Richtige Antworten:

(b) Es gibt eine

(1) Abbildung

(2) Surjektion

(3) Injektion

(4) Bijektion

mit Definitionsmenge $\mathbb{R} \times \emptyset$ und Zielmenge $\mathbb{R}$.

Richtige Antworten:

(c) Für alle Vektorräume V, alle Kongruenzrelationen $\equiv$ auf V und alle $v \in V/{\equiv}$ gilt:

(1) $(v, v) \in {\equiv}$

(2) ${\equiv} \subseteq V \times V$

(3) $v \times v \subseteq {\equiv}$

(4) ${\equiv} = {\equiv_{\overline{0}}}$

Richtige Antworten:

(d) Welche der folgenden Operationen gehört nicht zur Definition eines kommutativen Ringes?

(1) Eine Addition seiner Elemente.

(2) Eine Multiplikation seiner Elemente.

(3) Eine multiplikative Inversenbildung für seine Elemente $\neq 0$.

(4) Ein Skalarprodukt seiner Elemente.

Richtige Antworten:

Seite 2 zur Aufgabe 1

(e) Für alle abelschen Gruppen G und alle $a, b, c \in G$ gilt:

(1) $\exists x \in G : x + a = 0$

(2) $a + b = c$

(3) $a + (b + c) = (a + b) + (a + c)$

(4) $\exists x \in G : x+(a+b) \neq (x+a)+(x-b)$

Richtige Antworten:

(f) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$, alle n-dimensionalen Vektorräume V, alle linearen Abbildungen $f\colon V \to V$ und alle geordneten Basen $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V gilt:

(1) Ist $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, so ist f ein Automorphismus.

(2) Wenn f ein Automorphismus ist, dann gilt $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\} = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

(3) Sind $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig, so ist f ein Automorphismus.

(4) Wenn f ein Automorphismus ist, dann sind $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig.

Richtige Antworten:

(g) Für jeden Körper K, für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle Matrizen $A \in K^{n\times n}$ gilt:

(1) $(\det A)^n(\det(\operatorname{com} A))^n = (\det A)^n$

(2) $(\det A)(\det(\operatorname{com} A)) = (\det A)^n$

(3) $(\det A)(\det(\operatorname{com} A)) = \det A$

(4) $(\det A)(\det(\operatorname{com} A)) = 1$

Richtige Antworten:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 2 (Definitionen, ohne Begründung, 15 Punkte). Definiere (oder charakterisiere mittels anderer Begriffe, die in der Vorlesung vor der jeweiligen Definition drankamen)

(a) den Rang einer Matrix A mit Einträgen aus einem Körper K. *3 Punkte*

(b) das Vorzeichen einer Permutation $\sigma \in S_n$. *3 Punkte*

(c) wann zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ über einem Körper K ähnlich sind. *3 Punkte*

(d) die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes eines Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums. *3 Punkte*

(e) die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes eines Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums. *3 Punkte*

Es muss jeweils leicht erkennbar sein, warum die gegebene Definition zu der in der Vorlesung gegebenen äquivalent ist. Es muss und soll **keine Begründung** gegeben werden.

Lösung zur Aufgabe 2:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

Name: **Seite 3 zur Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 3 (Beispiele, ohne Begründung, 20 Punkte). Finde

(a) eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$ mit $A^3 + A^2 + A + I_3 = 0$. *2 Punkte*

(b) eine abelsche Gruppe, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Untergruppe mit genau n Elementen enthält.
3 Punkte

(c) alle Ideale des Ringes $\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$. *2 Punkte*

(d) einen Unterraum U von $\mathbb{R}^4$ mit $\mathbb{R}^4/U \cong \mathbb{R}^2 \cong U$. *2 Punkte*

(e) einen Vektorraum mit genau 5 Untervektorräumen. *3 Punkte*

(f) eine Permutation $\sigma \in S_5$ mit genau 7 Fehlständen. *2 Punkte*

(g) einen kommutativen Ring mit genau 6 Elementen. *1 Punkt*

(h) eine Matrix aus $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *3 Punkte*

(i) eine nicht trigonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\operatorname{com} A = A$. *2 Punkte*

Die Beispiele müssen leicht zu überprüfen sein. Für ein falsches Beispiel gibt es keinesfalls Punkte. Es muss genau ein konkretes Beispiel angegeben werden. Bei Angabe von mehreren Beispielen oder einer Schar von Beispielen gibt es keine Punkte! Es muss und soll **keine Begründung** gegeben werden.

Lösung zur Aufgabe 3:

Seite 2 zur Aufgabe 3

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 4**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 4 (8 Punkte). Bestimme eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung zur Aufgabe 4:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 4:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 5 (13 Punkte). Betrachte das Polynom

$$p := X^4 - X^2 - 1 \in \mathbb{R}[X],$$

das von p erzeugte Ideal (p) des Polynomrings $\mathbb{R}[X]$ (welches ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}[X]$ ist) und den Quotientenvektorraum $\mathbb{R}[X]/(p)$.

(a) Begründe, warum die Abbildung $g\colon \mathbb{R}[X]/(p) \to \mathbb{R}[X]/(p),\ \overline{q} \mapsto \overline{X^2 q}$ wohldefiniert und linear ist. *2 Punkte*

(b) Begründe, warum $X^2 - X - 1$ das Minimalpolynom von g ist. *3 Punkte*

(c) Finde eine geordnete Basis $\overline{v}$ von $\mathbb{R}[X]/(p)$ bezüglich derer $M(g, \underline{v})$ symmetrisch ist. *3 Punkte*

(d) Begründe, warum $(X^2 - X - 1)^2$ das charakteristische Polynom von g ist. *3 Punkte*

(e) Zeige, dass g diagonalisierbar ist. *2 Punkte*

Lösung zur Aufgabe 5:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 5:

Name: **Seite 3 zur Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 5:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 5:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 6**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 6 (7 Punkte). Sei K ein Körper und $A \in K^{2\times 2}$. Betrachte die Basis $\underline{v} := (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ mit

$$\begin{aligned} v_1 &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ v_3 &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ v_5 &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

des K-Vektorraums $K^{2\times 3}$. Bestimme die Darstellungsmatrix $M(f, \underline{v})$ des Vektorraumendomorphismus

$$f\colon K^{2\times 3} \to K^{2\times 3},\ B \mapsto AB$$

bezüglich der Basis $\underline{v}$.

Lösung zur Aufgabe 6:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 6:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 7**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 7 (7 Punkte). Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum der Dimension n. Zeige, dass n gerade ist genau dann, wenn es einen Endomorphismus φ von V mit $\operatorname{im}\varphi = \ker\varphi$ gibt.

Lösung zur Aufgabe 7:

Seite 2 zur Aufgabe 7

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 7:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 8**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 8 (6 Punkte). Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ mit $A^2 = 0$. Zeige $\operatorname{rank} A \leq \frac{n}{2}$.

Lösung zur Aufgabe 8:

Seite 2 zur Aufgabe 8

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 8:

Name: **Seite 1 zur Aufgabe 9**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 9 (10 Punkte). Betrachte

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

(a) Berechne das charakteristische Polynom von A. *2 Punkte*

(b) Bestimme die Eigenwerte von A. *2 Punkte*

(c) Zeige, dass A diagonalisierbar ist. *2 Punkte*

(d) Zeige $A^4 = I_3$. *2 Punkte*

(e) Berechne A^{-1}. *2 Punkte*

Lösung zur Aufgabe 9:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 9:

Name: **Seite 3 zur Aufgabe 9**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 9:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 9: