Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Merlin Carl
Markus Schweighofer

Übungsblatt 10 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: Man stelle sich im $\mathbb{R}^3$ eine Uhr vor, deren Mittelpunkt am Punkt $v_1 := \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ befestigt ist und deren Vorderseite in Richtung des Nullpunkts zeigt. Betrachte die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die jeden Punkt an der Geraden, die durch den Nullpunkt und v_1 läuft, um 90 Grad im Sinn dieser Uhr dreht.

(a) Man finde Vektoren $v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ derart, dass $\underline{v} := (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist bezüglich derer f die Darstellungsmatrix

$$M(f, \underline{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat.

(b) Berechne die Basiswechselmatrizen $M(\underline{v}, \underline{e})$ und $M(\underline{e}, \underline{v})$ zwischen der Basis $\underline{v}$ und der Standardbasis $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ von $\mathbb{R}^3$.

(c) Berechne $M(f, \underline{e})$ und $M(f^{-1}, \underline{e})$.

Aufgabe 2: Bestimme die Menge aller $A \in \mathbb{F}_{49}^{2\times 2}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathring{\imath} \\ -\mathring{\imath} & -1 \\ 1 & -\mathring{\imath} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1+\mathring{\imath} & 1-\mathring{\imath} \\ 1+\mathring{\imath} & 1-\mathring{\imath} \\ -1+\mathring{\imath} & 1+\mathring{\imath} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: Bestimme die Menge aller $x \in \mathbb{F}_9^3$ mit

$$x_1 + \mathring{\imath}x_1 - x_2 + x_3 + 1 + \mathring{\imath} = x_1 - x_2 + x_3 - \mathring{\imath}x_3 + 1 = x_1 + \mathring{\imath}x_2 = 0.$$

Dabei sind alle Zeilenoperationen wie in den Beispiel aus der Vorlesung zu dokumentieren.

Aufgabe 4: Die Fibonacci-Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ ist rekursiv definiert durch $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_{n+2} := f_{n+1} + f_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Betrachte die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

und ihre Potenzen definiert durch $A^0 := I_2$ und $A^{n+1} := A^n A$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Berechne A^2, A^3, A^4 und A^5. Stelle eine Vermutung auf, wie die Einträge von A^n sich für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ durch die Glieder der Fibonacci-Folge darstellen lassen und beweise sie durch Induktion nach n.

(b) Benutze (a) und Satz 2.1.6 über das Weglassen von Klammern, um $f_{2n+1} = f_{n+1}^2 + f_n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 22. Januar 2018, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihrer/s TutorIn/s in der 4. Etage des F-Gebäudes.