Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2017/2018

Merlin Carl
Markus Schweighofer

Übungsblatt 7 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: Sei $U := \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^4$ und $V := \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\4\\9\end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^4$. Schreibe $U \cap V$ wieder als Spann von endlich vielen Elementen aus $\mathbb{R}^4$ (natürlich mit Beweis).

Aufgabe 2: Wir definieren *elementare Spaltenoperationen* analog zu den elementaren Zeilenoperationen aus 5.2.1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Betrachte die Menge $K^{n\times n} = K^{\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}}$ aller $n\times n$-Matrizen. Da K bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe ist, ist auch $K^{n\times n}$ mit der punktweisen (also komponentenweisen) Addition eine abelsche Gruppe. Wir nennen diese Addition auf $K^{n\times n}$, die durch

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{n1}+b_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} \qquad (a_{ij}, b_{ij} \in K)$$

gegeben ist, auch die *Matrixaddition* auf $K^{n\times n}$. Sei $M \subseteq K^{n\times n}$ eine Menge von $n \times n$-Matrizen, die mindestens ein von der Nullmatrix verschiedenes Element enthält. Außerdem sei M unter elementaren Zeilen- und Spaltenoperationen sowie unter Matrixaddition abgeschlossen.

(a) Zeige, dass M eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}^{k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underbrace{\begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix}}_{n-k} \end{pmatrix}$ mit $k \geq 1$ enthält.

(b) Zeige, dass M eine Matrix enthält, in der ganz links oben eine 1 und sonst überall Nullen stehen.[1]

(c) Zeige, dass M für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ eine Matrix enthält, in der der Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte gleich 1 ist und dies gleichzeitig der einzige Eintrag ungleich null ist.

[1] Tipp: Addiere in der Matrix aus (a) die erste zur zweiten Zeile, falls $k \geq 2$, und versuche neue Matrizen mit noch mehr Nullen zu erhalten.

(d) Zeige $M = K^{n\times n}$.

Aufgabe 3: Sei $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$. Zeige:

(a) Gibt es $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $Ax = 0$, so gibt es auch $x \in \mathbb{Q}^n \setminus \{0\}$ mit $Ax = 0$. Mit anderen Worten: Hat ein ganzzahliges lineares Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung über den reellen Zahlen, so auch über den rationalen Zahlen.

(b) Gibt es $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit $Ax = 0$, so gibt es auch $x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ mit $Ax = 0$. Mit anderen Worten: Hat ein ganzzahliges lineares Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung über den komplexen Zahlen, so auch über den ganzen Zahlen.

Tipp: Betrachte den Gauß-Algorithmus.

Aufgabe 4: Finde die Lösungsmenge folgender homogener linearer Gleichungssysteme:

(a) $$\begin{pmatrix} \overline{8} & \overline{9} & \overline{-7} & \overline{-6} \\ \overline{1} & \overline{3} & \overline{5} & \overline{7} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{12} \\ \overline{12} & \overline{0} & \overline{5} & \overline{-7} \end{pmatrix} x = 0 \qquad (x \in \mathbb{F}_{17}^4),$$

wobei $\overline{x} := \overset{\equiv_{(17)}}{x}$ für $x \in \mathbb{Z}$.

(b) $$\begin{pmatrix} \overline{1} & \mathring{\imath} & \overline{1} & \mathring{\imath} \\ \overline{1} & \mathring{\imath} & \overline{2} & -\mathring{\imath} \\ \mathring{\imath} & \overline{2} & \mathring{\imath} & \overline{2} \\ -\mathring{\imath} & \overline{1} & \mathring{\imath} & \overline{2} \end{pmatrix} x = 0 \qquad (x \in \mathbb{F}_{9}^4),$$

wobei $\overline{x} := \overset{\equiv_{(3)}}{x}$ für $x \in \mathbb{Z}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei L ein Körper und K ein Unterkörper von L (das heißt K ein Unterring von L, der wieder ein Körper ist). Zeige: Hat ein homogenes lineares Gleichungssystem mit Koeffizienten aus K eine nichttriviale Lösung in L, so auch in K.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Montag, den 18. Dezember 2017, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihrer/s TutorIn/s in der 4. Etage des F-Gebäudes.