

**Vorlesungsskript**

# Kommutative Algebra

Kapitel 4 und 5

Markus Schweighofer \*

Sommersemester 2016

Universität Konstanz

\*Als Vorlage dienten Vorlesungsnotizen von Prof. Dr. Markus Brodmann von der ETH Zürich [<https://www.math.uzh.ch/fileadmin/user/brodmann/publikation/Ka.Skript.5.Mai.09.pdf>]

# 4 Höhe und Tiefe

In diesem Kapitel seien wieder alle Ringe kommutativ.

## 4.1 Die Höhe eines Moduls bezüglich eines Ideals

**Definition 4.1.1.** Sei  $R$  ein Ring und  $I \subseteq R$  ein Ideal.

- (a) Ist  $M$  ein  $R$ -Modul, so ist die *Höhe von  $M$  bezüglich  $I$*  (oder  $I$ -Höhe von  $M$ ) gegeben durch

$$\text{ht}_I M := \inf\{\text{ht } \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ (minimales } [\rightarrow 1.3.5]) \text{ Primoberideal von } (I + \text{ann } M) / \text{ann } M \\ \stackrel{1.1.14}{=} I(R / \text{ann } M) \text{ in } R / \text{ann } M\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} [\rightarrow 2.1.3].$$

- (b) Die *Höhe von  $I$*  wird definiert als die Höhe des  $R$ -Moduls  $R$  bezüglich  $I$ , also

$$\text{ht } I := \inf\{\text{ht } \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ (minimales } [\rightarrow 1.3.5]) \text{ Primoberideal von } I \text{ in } R\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

(beachte  $\text{ann}_R R = 0$ ), was im Fall  $I \in \text{spec } R$  mit Definition 2.1.3 konsistent ist.

**Bemerkung 4.1.2.** Sei  $R$  ein Ring,  $I \subseteq R$  ein Ideal und  $M$  ein  $R$ -Modul.

- (a)  $\text{ht}_I M = \text{ht}((I + \text{ann } M) / \text{ann } M)$
- (b) Ist  $J \subseteq R$  ein weiteres Ideal und gilt  $JM = 0$ , so  $\text{ht}_I M = \text{ht}_{(I+J)/J} M$ , wobei rechts  $M$  als  $R/J$ -Modul aufgefasst wird, denn der Annihilator von  $M$  als  $R/J$ -Modul ist  $(\text{ann } M) / J$  (beachte  $J \subseteq \text{ann } M$ ) und der kanonische Isomorphismus  $(R/J) / ((\text{ann } M) / J) \rightarrow R / \text{ann } M$  bildet

$$\underbrace{(((I + J) / J) + ((\text{ann } M) / J))}_{=(I + \text{ann } M) / J} / ((\text{ann } M) / J)$$

auf  $(I + \text{ann } M) / \text{ann } M$  ab.

**Satz 4.1.3.** Sei  $R$  ein Ring,  $I \subseteq R$  ein Ideal und  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul. Dann  $\sqrt{\text{ann}(M/IM)} = \sqrt{I + \text{ann } M}$ .

*Beweis.* „ $\supseteq$ “ klar, da  $\text{ann}(M/IM) \supseteq I + \text{ann } M$

„ $\subseteq$ “ Zu zeigen:  $\text{ann}(M/IM) \subseteq \sqrt{I + \text{ann } M}$ . Sei  $a \in \text{ann}(M/IM)$ . Dann gilt für den Endomorphismus  $f: M \rightarrow M, x \mapsto ax$ , dass  $\text{im } f \subseteq IM$ . Nach dem Satz von Cayley-Hamilton 1.1.16 gibt es also  $n \in \mathbb{N}$  und  $a_i \in I$  mit  $f^n + a_1 f^{n-1} + \dots + a_n \text{id}_M = 0$ , das heißt  $a^n + a_1 a^{n-1} + \dots + a_n \in \text{ann } M$ . Es folgt  $a^n \in I + \text{ann } M$ , also  $a \in \sqrt{I + \text{ann } M}$ .  $\square$

**Satz 4.1.4.** Sei  $R$  ein noetherscher Ring,  $I \subseteq R$  ein Ideal und  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul. Dann  $\text{ht}_I M = \infty \iff IM = M$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \text{ht}_I M = \infty &\stackrel{2.4.5}{\iff} I + \text{ann } M = R \iff 1 \in I + \text{ann } M \iff 1 \in \sqrt{I + \text{ann } M} \\ &\iff \sqrt{I + \text{ann } M} = R \stackrel{4.1.3}{\iff} \sqrt{\text{ann}(M/IM)} = R \\ &\iff 1 \in \sqrt{\text{ann}(M/IM)} \iff 1 \in \text{ann}(M/IM) \iff M \subseteq IM \\ &\iff IM = M. \end{aligned}$$

□

**Satz 4.1.5.** [ $\rightarrow$ 2.4.6] Sei  $R$  ein noetherscher Ring,  $I \subseteq R$  ein Ideal,  $a \in I$  und  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul. Dann gilt

$$\text{ht}_I M - 1 \leq \text{ht}_I(M/aM) \leq \text{ht}_I M \quad (\text{wobei } \infty - 1 := \infty).$$

Liegt zudem  $a$  in keinem der minimalen Primoberideale von  $\text{ann } M$  (welche nach 2.2.19 genau die endlich vielen minimalen zu  $M$  assoziierten Primideale sind), so gilt genauer

$$\text{ht}_I(M/aM) = \text{ht}_I M - 1 \quad (\text{wobei wieder } \infty - 1 := \infty).$$

*Beweis.* Nach 4.1.3 gilt  $\sqrt{\text{ann}(M/aM)} = \sqrt{(a) + \text{ann } M}$ . Daher gilt für alle  $\mathfrak{p} \in \text{spec } R$ , dass

$$\begin{aligned} (*) \quad \text{ann}(M/aM) \subseteq \mathfrak{p} &\iff \sqrt{\text{ann}(M/aM)} \subseteq \mathfrak{p} \iff \sqrt{(a) + \text{ann } M} \subseteq \mathfrak{p} \\ &\iff a \in \mathfrak{p} \ \& \ \text{ann } M \subseteq \mathfrak{p} \end{aligned}$$

und wegen  $a \in I$  auch

$$(**) \quad I + \text{ann}(M/aM) \subseteq \mathfrak{p} \iff I + \text{ann } M \subseteq \mathfrak{p}.$$

Aus (\*) sieht man mit 1.3.7 und 2.1.3 leicht, dass

$$\text{ht}(\mathfrak{p}/\text{ann}(M/aM)) = \text{ht}(\mathfrak{p}/((\text{ann } M) + (a))) = \text{ht}((\mathfrak{p}/\text{ann } M)/(\bar{a}))$$

und dann wegen 2.4.6

$$(***) \quad \text{ht}(\mathfrak{p}/\text{ann } M) - 1 \leq \text{ht}(\mathfrak{p}/\text{ann}(M/aM)) \leq \text{ht}(\mathfrak{p}/\text{ann } M)$$

für alle  $\mathfrak{p} \in \text{spec } R$  mit  $a \in \mathfrak{p}$  und  $\text{ann } M \subseteq \mathfrak{p}$ , wobei in der ersten Ungleichung Gleichheit herrscht, falls  $a$  in keinem der minimalen Primoberideale von  $\text{ann } M$  liegt. Weiter gilt nach Definition 4.1.1 und 1.3.7

$$\text{ht}_I M = \inf\{\text{ht}(\mathfrak{p}/\text{ann } M) \mid \mathfrak{p} \in \text{spec } R, I + \text{ann } M \subseteq \mathfrak{p}\}$$

und

$$\begin{aligned} \text{ht}_I(M/aM) &= \inf\{\text{ht}(\mathfrak{p}/\text{ann}(M/aM)) \mid \mathfrak{p} \in \text{spec } R, I + \text{ann}(M/aM) \subseteq \mathfrak{p}\} \\ &\stackrel{(**)}{=} \inf\{\text{ht}(\mathfrak{p}/\text{ann}(M/aM)) \mid \mathfrak{p} \in \text{spec } R, I + \text{ann } M \subseteq \mathfrak{p}\}. \end{aligned}$$

Es folgt  $\text{ht}_I M = \infty \iff \text{ht}_I(M/aM) = \infty$  und mit (\*\*\*) sogar die ganze Behauptung.  $\square$

**Korollar 4.1.6.** Sei  $R$  ein noetherscher Ring,  $I \subseteq R$  ein Ideal,  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul und  $a \in I$  kein Nullteiler für  $M$  [ $\rightarrow$ 1.2.9]. Dann gilt  $\text{ht}_I(M/aM) = \text{ht}_I M - 1$  (mit  $\infty - 1 := \infty$ ).

*Beweis.* 4.1.5 und 2.2.5  $\square$

**Definition 4.1.7.** Sei  $R$  ein Ring,  $M$  ein  $R$ -Modul,  $r \in \mathbb{N}_0$  und  $a_1, \dots, a_r \in R$ . Man sagt, dass  $a_1, \dots, a_r$  eine Nichtnullteilerfolge für  $M$  bilden, wenn für kein  $i \in \{1, \dots, r\}$   $a_i$  ein Nullteiler [ $\rightarrow$ 1.2.9] für  $M/\sum_{j=1}^{i-1} a_j M$  ist. Ist zusätzlich  $I \subseteq R$  ein Ideal und  $a_1, \dots, a_r \in I$ , so sagt man,  $a_1, \dots, a_r$  bilden eine Nichtnullteilerfolge in  $I$  für  $M$ .

*Bemerkung 4.1.8.* Sei  $R$  ein Ring,  $M$  ein  $R$ -Modul,  $r \in \mathbb{N}_0$ ,  $a_1, \dots, a_r \in R$  und  $0 \leq s \leq r$ .

- (a)  $a_1, \dots, a_r$  bilden eine Nichtnullteilerfolge für  $M$  genau dann, wenn  $a_1, \dots, a_s$  und  $a_{s+1}, \dots, a_r$  jeweils eine solche für  $M$  und  $M/\sum_{i=1}^s a_i M$  bilden, denn ist  $i \in \{s+1, \dots, r\}$ , so gilt

$$\left( M / \sum_{j=1}^s a_j M \right) / \sum_{j=s+1}^{i-1} a_j \left( M / \sum_{k=1}^s a_k M \right) \cong M / \sum_{j=1}^{i-1} a_j M,$$

$$\text{denn } \sum_{j=s+1}^{i-1} a_j \left( M / \sum_{k=1}^s a_k M \right) = \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_j M \right) / \sum_{k=1}^s a_k M.$$

- (b) [ $\rightarrow$ 4.1.2(b)] Ist  $J \subseteq R$  ein weiteres Ideal und gilt  $JM = 0$ , so bilden  $a_1, \dots, a_r$  offensichtlich genau dann eine Nichtnullteilerfolge für den  $R$ -Modul  $M$ , wenn  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r$  eine solche für den  $R/J$ -Modul  $M$  bilden.
- (c) Ist  $M = 0$ , so bilden  $a_1, \dots, a_r$  stets eine Nichtnullteilerfolge für  $M$ .
- (d) Ist  $r \geq 1$  und  $a_1 \in R^\times$ , so bilden  $a_1, \dots, a_r$  wegen (a), (c) und  $a_1 M = M$  ebenfalls eine Nichtnullteilerfolge für  $M$ .
- (e)  $1, 0$  bilden eine Nichtnullteilerfolge für  $M$  nach (d), aber  $0, 1$  nur falls  $M = 0$ .

**Satz 4.1.9.** Seien  $R$  ein noetherscher Ring,  $I \subseteq R$  ein Ideal,  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul,  $r \in \mathbb{N}_0$  und  $a_1, \dots, a_r$  eine Nichtnullteilerfolge in  $I$  für  $M$ . Dann gilt

$$\text{ht}_I \left( M / \sum_{i=1}^r a_i M \right) = \text{ht}_I M - r \quad (\text{mit } \infty - r := \infty).$$

*Beweis.* direkt aus Korollar 4.1.6 und Definition 4.1.7 □

**Korollar 4.1.10.** Seien  $R$  ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und  $a_1, \dots, a_r$  eine Nichtnullteilerfolge in  $\mathfrak{m}$  für den  $R$ -Modul  $R$ . Dann gilt

$$\dim(R/(a_1, \dots, a_r)) = (\dim R) - r.$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \dim(R/(a_1, \dots, a_r)) &\stackrel{2.1.1}{=} \underset{2.1.3}{\text{ht}} \left( \mathfrak{m} / \sum_{i=1}^r a_i R \right) \stackrel{4.1.1(b)}{=} \text{ht}_{\mathfrak{m} / \sum_{i=1}^r a_i R} \left( R / \sum_{i=1}^r a_i R \right) \\ &\stackrel{4.1.2(b)}{=} \text{ht}_{\mathfrak{m}} \left( R / \sum_{i=1}^r a_i R \right) \stackrel{4.1.9}{=} (\text{ht}_{\mathfrak{m}} R) - r \\ &\stackrel{4.1.1(b)}{=} (\text{ht } \mathfrak{m}) - r \stackrel{2.1.1}{=} \underset{2.1.3}{(\dim R)} - r. \end{aligned}$$

□

## 4.2 Die Tiefe eines Moduls bezüglich eines Ideals

**Definition 4.2.1.** <sup>1</sup> [→4.1.1(a)] Sei  $R$  ein Ring,  $I \subseteq R$  ein Ideal und  $M$  ein  $R$ -Modul. Die Tiefe von  $M$  bezüglich  $I$  (oder  $I$ -Tiefe von  $M$ ) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{dpt}_I M &:= \sup \{ r \in \mathbb{N}_0 \mid \exists a_1, \dots, a_r \in I : a_1, \dots, a_r \text{ ist Nichtnullteilerfolge für } M \} \\ &\in \mathbb{N}_0 \cup \{ \infty \}. \end{aligned}$$

**Satz 4.2.2.** Sei  $R$  ein noetherscher Ring,  $I \subseteq R$  ein Ideal und  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul. Dann gilt

$$\text{dpt}_I M \leq \text{ht}_I M.$$

*Beweis.* Nach Satz 4.1.9 gilt  $\text{ht}_I M = \text{ht}_I (M / \sum_{i=1}^r a_i M) + r \geq 0 + r = r$  für alle Nichtnullteilerfolgen  $a_1, \dots, a_r$  in  $I$  für  $M$ . □

**Satz 4.2.3.** Seien  $R$  ein Ring,  $I \subseteq R$  ein Ideal und  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul mit  $IM = M$ . Dann gilt  $\text{dpt}_I M = \infty$ .

*Beweis.* Sei  $a_1, \dots, a_r$  eine Nichtnullteilerfolge in  $I$  für  $M$ . Wir zeigen, dass es ein  $a \in I$  gibt so, dass  $a_1, \dots, a_r, a$  wieder eine Nichtnullteilerfolge für  $M$  ist. Zu zeigen ist also die Existenz eines Nichtnullteilers  $a \in I$  für den Modul  $N := M / \sum_{i=1}^r a_i M$ . Aus  $IM = M$  folgt offensichtlich  $IN = N$ . Nach dem Nakayama-Lemma 1.1.17 gibt es ein  $b \in R$  mit  $1 - b \in I$  und  $bN = 0$ . Setze  $a := 1 - b \in I$ . Dann gilt für alle  $x \in N$  mit  $ax = 0$ , dass  $x = x - 0 = x - ax = (1 - a)x = bx = 0$ . Also ist  $a$  kein Nullteiler für  $M$ . □

<sup>1</sup>In zukünftigen Versionen dieses Skripts sollte nach dieser Definition die Bemerkung 5.2.8 kommen.

**Korollar 4.2.4.** [ $\rightarrow$ 4.1.4] Seien  $R$  ein noetherscher Ring,  $I \subseteq R$  ein Ideal und  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul. Dann gilt  $\text{dpt}_I M = \infty \iff IM = M$ .

*Beweis.* " $\Leftarrow$ " folgt aus Satz 4.2.3 und " $\Rightarrow$ " aus den Sätzen 4.2.2 und 4.1.4.  $\square$

**Lemma 4.2.5.** Sei  $R$  ein Ring,  $M$  ein  $R$ -Modul,  $a \in R$  kein Nullteiler für  $M$ ,  $\mathfrak{p} \in \text{ass}(M/aM)$  und  $b \in \mathfrak{p}$  kein Nullteiler für  $M$ . Dann gilt  $\mathfrak{p} \in \text{ass}(M/bM)$ .

*Beweis.* Wähle gemäß Definition 2.2.3 ein  $x \in M$  mit  $\mathfrak{p} = \text{ann}_{M/aM}(\bar{x})$ . Wegen  $b \in \mathfrak{p}$  gibt es ein  $y \in M$  mit  $bx = ay$ . Wir behaupten  $\mathfrak{p} = \text{ann}_{M/bM}(\bar{y})$ . Zu zeigen ist hierzu für alle  $c \in R$

$$cx \in aM \iff cy \in bM.$$

" $\Rightarrow$ " Ist  $cx \in aM$ , so  $cbx \in abM$  und daher  $acy = cay \in abM$ . Da  $a$  kein Nullteiler für  $M$  ist, folgt  $cy \in bM$ .

" $\Leftarrow$ " Ist  $cy \in bM$ , so  $cay \in abM$  und daher  $bcx = cbx \in baM$ . Da  $b$  kein Nullteiler für  $M$  ist, folgt  $cx \in aM$ .  $\square$

**Proposition 4.2.6.** Sei  $R$  ein Ring,  $S \subseteq R$  multiplikativ und  $M$  ein  $R$ -Modul. Sei  $a_1, \dots, a_r$  eine Nichtnullteilerfolge für  $M$  und seien  $s_1, \dots, s_r \in S$ . Dann bilden  $\frac{a_1}{s_1}, \dots, \frac{a_r}{s_r}$  eine Nichtnullteilerfolge für  $S^{-1}M$ .

*Beweis.* Sei  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Zu zeigen ist, dass  $\frac{a_i}{s_i}$  kein Nullteiler für den Modul

$$S^{-1}M / \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_j}{s_j} S^{-1}M \cong S^{-1}(M / \sum_{j=1}^{i-1} a_j M)$$

ist, wobei die Isomorphie aus 1.2.13 mit  $\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_j}{s_j} S^{-1}M = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_j}{1} S^{-1}M = S^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} a_j M$  folgt. Sei daher  $x \in M / \sum_{j=1}^{i-1} a_j M$  und  $s \in S$  mit  $\frac{a_i x}{s_i s} = 0$ . Es ist  $\frac{x}{s} = 0$  zu zeigen. Wähle  $t \in S$  mit  $ta_i x = 0$ . Da  $a_i$  nach Voraussetzung kein Nullteiler für den Modul  $M / \sum_{j=1}^{i-1} a_j M$  ist, folgt  $tx = 0$  und daher  $\frac{x}{s} = \frac{tx}{st} = 0$ .  $\square$

**Satz 4.2.7** (Matsumura). Sei  $R$  ein noetherscher Ring,  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul,  $a$  ein Nichtnullteiler für  $M$  und  $\mathfrak{p} \in \text{ass} M$ . Dann ist jedes minimale Primoberideal von  $\mathfrak{p} + (a)$  assoziiert zum  $R$ -Modul  $M/aM$ .

*Beweis.* Sei  $\mathfrak{q}$  ein minimales Primoberideal von  $\mathfrak{p} + (a)$ . Dann ist  $R_{\mathfrak{q}}$  nach 1.2.12(f) noethersch,  $M_{\mathfrak{q}}$  nach 1.2.12(e) ein endlich erzeugter  $R_{\mathfrak{q}}$ -Modul,  $\frac{a}{1} \in R_{\mathfrak{q}}$  nach 4.2.6 ein Nichtnullteiler für  $M_{\mathfrak{q}}$ ,  $\mathfrak{p}_{\mathfrak{q}} \in \text{ass}(M_{\mathfrak{q}})$  nach 2.2.10 und  $\mathfrak{q}_{\mathfrak{q}}$  ein minimales Primoberideal von  $(\mathfrak{p} + (a))_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{q}} + (\frac{a}{1})$ , wie man mit 1.2.19 leicht zeigt. Wenn wir  $\mathfrak{q}_{\mathfrak{q}} \in \text{ass}(M_{\mathfrak{q}} / \frac{a}{1} M_{\mathfrak{q}})$  zeigen können, so folgt nach 1.2.13 wegen  $\frac{a}{1} M_{\mathfrak{q}} = (aM)_{\mathfrak{q}}$ , dass  $M_{\mathfrak{q}} / \frac{a}{1} M_{\mathfrak{q}} \cong (M/aM)_{\mathfrak{q}}$  und daher  $\mathfrak{q}_{\mathfrak{q}} \in (\text{ass}(M/aM))_{\mathfrak{q}}$ . Mit 1.2.20 und 2.2.10 folgt dann  $\mathfrak{q} \in \text{ass}(M/aM)$ . Deshalb können wir  $R$  durch  $R_{\mathfrak{q}}$  ersetzen und von nun an voraussetzen, dass  $R$  lokal mit maximalem Ideal  $\mathfrak{q}$  ist.

Betrachte nun den Untermodul  $N := \{y \in M \mid \mathfrak{p} \subseteq \text{ann}(y)\}$  von  $M$ . Sicher ist  $N \neq 0$ , denn wählt man  $x \in M$  mit  $\mathfrak{p} = \text{ann}(x)$ , dann  $0 \neq x \in N$ . Da  $\mathfrak{q}$  ein minimales

Primoberideal von  $\mathfrak{p} + (a)$  ist, welches alle anderen Primideale von  $R$  enthält, ist es das einzige Primoberideal von  $\mathfrak{p} + (a)$  und damit insbesondere gleich  $\sqrt{\mathfrak{p} + (a)}$  [→1.3.6]. Da  $R$  noethersch ist, gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\mathfrak{q}^n \subseteq \mathfrak{p} + (a)$  [→1.3.10]. Insbesondere ist  $\mathfrak{q}^n N \subseteq (\mathfrak{p} + (a))N \subseteq \mathfrak{p}N + aN \subseteq 0 + aM = aM$ .

Angenommen es gilt sogar  $N \subseteq aM$ . Für den Untermodul  $P := \{y \in M \mid ay \in N\}$  von  $M$  gilt dann  $N = aP$ . Es folgt  $a\mathfrak{p}P = \mathfrak{p}N = 0$  und damit sogar  $\mathfrak{p}P = 0$ , da  $a$  kein Nullteiler für  $M$  ist. Also  $P \subseteq N$  und damit  $N = aP \subseteq aN \subseteq \mathfrak{q}N \subseteq N$ , das heißt  $N = \mathfrak{q}N$ . Das Nakayama-Lemma in seiner zweiten Fassung 1.1.21 (beachte 1.1.9) widerspricht nun  $N \neq 0$ .

Wähle nun  $n \in \mathbb{N}$  minimal mit  $\mathfrak{q}^n N \subseteq aM$ . Dann gilt  $\mathfrak{q}^{n-1} N \not\subseteq aM$ . Wähle  $z \in \mathfrak{q}^{n-1} N \setminus aM$ . Dann  $\mathfrak{q}z \subseteq aM$ , also  $I := \{b \in R \mid bz \in aM\} \supseteq \mathfrak{q}$ . Weil  $I$  ein Ideal von  $R$  mit  $1 \notin I$  und  $\mathfrak{q}$  ein maximales Ideal von  $R$  ist, folgt  $\mathfrak{q} = \{b \in R \mid bz \in aM\}$ , das heißt  $\mathfrak{q} = \text{ann}_{M/aM}(\bar{z})$ . Also  $\mathfrak{q} \in \text{ass}(M/aM)$  wie gewünscht.  $\square$

**Satz 4.2.8** (Vertauschungssatz für Nichtnullteilerfolgen). *Seien  $R$  ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$ ,  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul,  $a_1, \dots, a_r$  eine Nichtnullteilerfolge in  $\mathfrak{m}$  für  $M$  und  $\sigma \in S_r$ . Dann ist auch  $a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(r)}$  eine Nichtnullteilerfolge in  $\mathfrak{m}$  für  $M$ .*

*Beweis.*  $\exists$  ist  $\sigma$  eine Nachbartransposition, da jedes Element von  $S_r$  ein Produkt solcher ist. Mit 4.1.8(a) können wir uns dann leicht auf den Fall  $r = 2$  zurückziehen. Zu zeigen ist:

- (a)  $a_2$  ist kein Nullteiler für  $M$ .
- (b)  $a_1$  ist kein Nullteiler für  $M/a_2M$ .

Wir zeigen beides mittels 2.2.5.

Für (a) sei  $\mathfrak{p} \in \text{ass } M$ . Zu zeigen ist  $a_2 \notin \mathfrak{p}$ . Wegen  $\mathfrak{p} + (a_1) \subseteq \mathfrak{m}$  gibt es nach 1.3.5 und 1.3.7 ein minimales Primoberideal  $\mathfrak{q}$  von  $\mathfrak{p} + (a_1)$ . Nach dem Satz von Matsumura 4.2.7 gilt  $\mathfrak{q} \in \text{ass}(M/a_1M)$ . Nach 2.2.5 gilt  $a_2 \notin \mathfrak{q}$ , denn  $a_2$  ist nach Voraussetzung kein Nullteiler für  $M/a_1M$ . Also gilt erst recht  $a_2 \notin \mathfrak{p}$ .

Für (b) sei  $\mathfrak{p} \in \text{ass}(M/a_2M)$ . Wäre  $a_1 \in \mathfrak{p}$ , so wäre  $\mathfrak{p} \in \text{ass}(M/a_1M)$  wegen (a) und Lemma 4.2.5, was  $a_2 \in \text{ann}(M/a_2M) \subseteq \mathfrak{p}$  widerspräche, denn dann wäre  $a_2$  nach 2.2.5 ein Nullteiler für  $M/a_1M$ .  $\square$

**Lemma 4.2.9.** *Sei  $R$  ein noetherscher Ring,  $M$  ein  $R$ -Modul und  $a_1, \dots, a_r$  eine Nichtnullteilerfolge für  $M$ . Sei  $a_0 \in R$  für keinen der Moduln  $M/\sum_{j=1}^i a_j M$  mit  $i \in \{0, \dots, r\}$  ein Nullteiler. Dann ist  $a_0, a_1, \dots, a_r$  auch eine Nichtnullteilerfolge für  $M$ .*

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach  $r \in \mathbb{N}_0$ .

$r = 0$  trivial

$r = 1$  Nach 2.2.5 liegt  $a_0$  in keinem zu  $M/a_1M$  assoziierten Primideal, während es wegen  $a_0 \in \text{ann}(M/a_0M)$  selbstverständlich in jedem zu  $M/a_0M$  assoziierten Primideal liegt. Insbesondere  $\text{ass}(M/a_0M) \cap \text{ass}(M/a_1M) = \emptyset$ . Da weder  $a_0$  noch  $a_1$  ein

Nullteiler für  $M$  ist, gilt nach Lemma 4.2.5, dass  $a_1 \notin \mathfrak{p}$  für alle  $\mathfrak{p} \in \text{ass}(M/a_0M)$ . Nach 2.2.5 ist  $a_1$  also kein Nullteiler für  $M/a_0M$ . Also ist  $a_0, a_1$  eine Nichtnullteilerfolge für  $M$ .

$1, r-1 \rightarrow r$  ( $r \geq 2$ ) Nach Induktionsvoraussetzung ist  $a_0, \dots, a_{r-1}$  eine Nichtnullteilerfolge für  $M$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $a_r$  kein Nullteiler für  $M/\sum_{j=0}^{r-1} a_j M$  ist. Wir zeigen hierzu sogar, dass  $a_1, \dots, a_{r-1}, a_0, a_r$  eine Nichtnullteilerfolge für  $M$  ist, denn dann ist insbesondere  $a_r$  kein Nullteiler für  $M/(\sum_{j=1}^{r-1} a_j M + a_0 M) = M/\sum_{j=0}^{r-1} a_j M$ . Hierzu ist wegen 4.1.8(a) nur zu zeigen, dass  $a_0, a_r$  eine Nichtnullteilerfolge für  $N := M/\sum_{j=1}^{r-1} a_j M$  ist. Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf den Modul  $N$  reicht es hierfür zu zeigen, dass  $a_0$  weder ein Nullteiler für  $N$  noch für  $N/a_r N$  ist. Beides folgt direkt aus der Voraussetzung, letzteres wegen  $N/a_r N \cong M/\sum_{j=1}^r a_j M$ .  $\square$

**Definition 4.2.10.** Seien  $R$  ein Ring,  $M$  ein  $R$ -Modul,  $I \subseteq R$  ein Ideal und  $a_1, \dots, a_r$  eine Nichtnullteilerfolge in  $I$  für  $M$  heißt *verlängerbar*, wenn es ein  $a \in I$  gibt derart, dass  $a_1, \dots, a_r, a$  eine Nichtnullteilerfolge für  $M$  ist.

**Satz 4.2.11** (Hauptsatz über Nichtnullteilerfolgen). Seien  $R$  ein noetherscher Ring,  $I \subseteq R$  ein Ideal,  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul,  $r \in \mathbb{N}_0$  und  $a_1, \dots, a_r$  eine Nichtnullteilerfolge in  $I$  für  $M$ . Dann sind äquivalent:

- (a)  $r = \text{dpt}_I M$
- (b)  $a_1, \dots, a_r$  ist nicht verlängerbar als Nichtnullteilerfolge in  $I$  für  $M$ .

*Beweis.* (a)  $\implies$  (b) ist klar nach Definition 4.2.1. Wir zeigen (b)  $\implies$  (a) durch Induktion nach  $r$ :

$r=0$   $\checkmark$

$r=1$  Gelte (b). Es ist  $r \leq \text{dpt}_I M$  trivial. Um  $\text{dpt}_I M \leq r = 1$  zu zeigen, sei  $b \in I$  kein Nullteiler für  $M$ . Zu zeigen ist, dass jedes Element von  $I$  ein Nullteiler für  $M/bM$  ist, was nach 2.2.5 zu  $I \subseteq \bigcup \text{ass}(M/bM)$  äquivalent ist. Nach Voraussetzung (b) ist jedes Element von  $I$  ein Nullteiler für  $M/a_1 M$ , was wieder nach 2.2.5 mit  $I \subseteq \bigcup \text{ass}(M/a_1 M)$  gleichbedeutend ist. Da  $\text{ass}(M/a_1 M)$  nach 2.2.18 endlich ist, gibt es gemäß 1.3.4 ein  $\mathfrak{p} \in \text{ass}(M/a_1 M)$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$ . Aus Lemma 4.2.5 folgt nun  $\mathfrak{p} \in \text{ass}(M/bM)$ , da  $b \in I \subseteq \mathfrak{p}$ . Also  $I \subseteq \mathfrak{p} \subseteq \bigcup \text{ass}(M/bM)$ .

$1, r-1 \rightarrow r$  ( $r \geq 2$ ) Gelte (b). Wieder ist  $r \leq \text{dpt}_I M$  trivial. Um  $\text{dpt}_I M \leq r$  zu zeigen, sei  $b_1, \dots, b_s$  eine weitere Nichtnullteilerfolge in  $I$  für  $M$ . Zu zeigen ist  $s \leq r$ .  $\mathbb{C} s \geq 1$ . Dazu reicht es zu zeigen, dass es ein  $c \in I$  gibt derart, dass

- (\*)  $c, a_1, \dots, a_{r-1}$  eine nicht verlängerbare Nichtnullteilerfolge in  $I$  für  $M$  und
- (\*\*)  $c, b_1, \dots, b_{s-1}$  eine Nichtnullteilerfolge in  $I$  für  $M$

ist, denn dann ist mit 4.1.8(a)  $a_1, \dots, a_{r-1}$  eine nicht verlängerbare Nullteilerfolge in  $I$  für  $M/cM$  und  $b_1, \dots, b_{s-1}$  eine Nichtnullteilerfolge in  $I$  für  $M/cM$ , so dass aus der Induktionsvoraussetzung angewandt auf den endlich erzeugten  $R$ -Modul  $M/cM$  folgt  $s-1 \leq r-1$  und daher  $s \leq r$ . Um (\*) und (\*\*) zu zeigen, reicht es nach Lemma 4.2.9 zu zeigen, dass es ein  $c \in I$  gibt mit



(○)  $c$  ist für keinen der  $r+s$  Moduln  $M/\sum_{j=1}^i a_j M$  mit  $i \in \{0, \dots, r-1\}$  und  $M/\sum_{j=1}^i b_j M$  mit  $i \in \{0, \dots, s-1\}$  ein Nullteiler und

(□) jedes Element von  $I$  ist ein Nullteiler für  $M/(cM + \sum_{j=1}^{r-1} a_j M)$ ,

wobei (□) die Bedingung „nicht verlängerbar“ in (\*) sicherstellt. Wir zeigen zunächst, dass jedes  $c \in I$  mit (○) automatisch auch (□) erfüllt: Erfülle  $c \in I$  die Bedingung (○). Nach Bemerkung 4.1.8(a) und Voraussetzung (b) ist  $a_r$  eine nicht verlängerbare Nichtnullteilerfolge in  $I$  für den  $R$ -Modul  $N := M/\sum_{j=1}^{r-1} a_j M$ , der nach Induktionsvoraussetzung daher Tiefe 1 bezüglich  $I$  hat. Da  $c$  wegen (○) kein Nullteiler für  $N$  ist, ist auch  $c$  eine nicht verlängerbare Nichtnullteilerfolge in  $I$  für  $N$ . Es gibt in  $I$  also keinen Nullteiler für  $N/cN \cong M/(cM + \sum_{j=1}^{r-1} a_j M)$ .

Schließlich zeigen wir die Existenz von  $c \in I$  mit (○). Nach 2.2.5 ist diese gleichbedeutend zu

$$I \not\subseteq \bigcup_{i=0}^{r-1} \left( \bigcup_{j=1}^i \text{ass} \left( M/\sum_{j=1}^i a_j M \right) \cup \bigcup_{i=0}^{s-1} \text{ass} \left( M/\sum_{j=1}^i b_j M \right) \right).$$

Da zu jedem endlich erzeugten Modul über  $R$  nach 2.2.18 nur endlich viele Primideale assoziiert sind, reicht es dazu nach 1.3.4 schon zu zeigen, dass  $I$  in keinem der zu einem der oben genannten  $r+s$  Moduln assoziierten Primideale enthalten ist. Tatsächlich gilt nach 2.2.5 sogar

$$a_{i+1} \in I \setminus \bigcup_{j=1}^i \text{ass} \left( M/\sum_{j=1}^i a_j M \right) \text{ für } i \in \{0, \dots, r-1\} \text{ und}$$

$$b_{i+1} \in I \setminus \bigcup_{j=1}^i \text{ass} \left( M/\sum_{j=1}^i b_j M \right) \text{ für } i \in \{0, \dots, s-1\}.$$

□

**Satz 4.2.12.** [ $\rightarrow$ 4.1.9] Sei  $R$  ein noetherscher Ring,  $I \subseteq R$  ein Ideal,  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul,  $r \in \mathbb{N}_0$  und  $a_1, \dots, a_r$  eine Nichtnullteilerfolge in  $I$  für  $M$ . Dann gilt

$$\text{dpt}_I \left( M/\sum_{i=1}^r a_i M \right) = \text{dpt}_I M - r \quad (\text{mit } \infty - r := \infty).$$

*Beweis.* Schreibe  $N := M/\sum_{i=1}^r a_i M$  und sei zunächst  $\text{dpt}_I M = \infty$ . Nach 4.2.4 gilt dann  $IM = M$ . Daraus folgt sofort  $IN = N$ , woraus wieder mit 4.2.4 folgt  $\text{dpt}_I N = \infty$ . Sei nun  $\text{dpt}_I M < \infty$ . Dann kann man  $a_1, \dots, a_r$  offenbar zu einer nicht verlängerbaren Nichtnullteilerfolge  $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s$  in  $I$  für  $M$  ergänzen für ein  $s \in \mathbb{N}_0$ . Nach dem Hauptsatz über Nichtnullteilerfolgen 4.2.11 gilt dann  $r+s = \text{dpt}_I M$ . Nach 4.1.8(a) ist  $b_1, \dots, b_s$  eine nicht verlängerbare Nichtnullteilerfolge in  $I$  für  $N$ , woraus wieder mit dem Hauptsatz folgt  $s = \text{dpt}_I N$ . □

# 5 Cohen-Macaulay-Ringe

In diesem Kapitel seien wieder alle Ringe kommutativ.

## 5.1 Die Krulldimension eines Moduls

**Satz 5.1.1.** [ $\rightarrow$ 2.2.15] Sei  $M$  ein  $R$ -Modul und  $I \subseteq R$  ein Ideal mit  $IM = 0$ , so dass  $M$  auch als  $R/I$ -Modul aufgefasst werden kann. Dann gilt  $I \subseteq \mathfrak{p}$  für alle  $\mathfrak{p} \in \text{supp } M$  und

$$\text{supp}_{R/I} M = \{\mathfrak{p}/I \mid \mathfrak{p} \in \text{supp}_R M\}.$$

*Beweis.* Ist  $\mathfrak{p} \in \text{supp } M$ , so gilt  $I \stackrel{IM=0}{\subseteq} \text{ann } M \stackrel{2.2.13}{\subseteq} \mathfrak{p}$ . Wegen

$$\text{spec}(R/I) \stackrel{1.3.7}{=} \{\mathfrak{p}/I \mid \mathfrak{p} \in \text{spec } R, I \subseteq \mathfrak{p}\}$$

reicht es zu zeigen, dass für alle  $\mathfrak{p} \in \text{spec } R$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$  gilt:

$$\mathfrak{p}/I \in \text{supp}_{R/I}(M) \iff \mathfrak{p} \in \text{supp}_R(M).$$

Sei also  $\mathfrak{p} \in \text{spec } R$  mit  $I \subseteq \mathfrak{p}$ . Nach Definition 2.2.11 bleibt zu zeigen

$$M_{\mathfrak{p}/I} = 0 \iff M_{\mathfrak{p}} = 0,$$

wobei  $M$  links als  $R/I$ -Modul und rechts als  $R$ -Modul aufgefasst wird. Hierzu reicht es für alle  $x \in M$  zu zeigen, dass

$$\frac{x}{1} = 0 \text{ in } M_{\mathfrak{p}/I} \iff \frac{x}{1} = 0 \text{ in } M_{\mathfrak{p}}.$$

Dies ist einfach. □

**Proposition 5.1.2.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann gilt für alle  $\mathfrak{p} \in \text{supp } M$  und  $\mathfrak{q} \in \text{spec } R$  mit  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ , dass  $\mathfrak{q} \in \text{supp } M$ .

*Beweis.* Zu zeigen ist, dass für alle  $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \text{spec } R$  mit  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$  gilt

$$M_{\mathfrak{q}} = 0 \implies M_{\mathfrak{p}} = 0.$$

Tatsächlich gilt allgemeiner für alle multiplikativen Mengen  $S, T \subseteq R$  mit  $T \subseteq S$

$$T^{-1}M = 0 \implies S^{-1}M = 0:$$

In der Tat: Seien  $S, T \subseteq R$  multiplikativ,  $T \subseteq S$  mit  $T^{-1}M = 0$  und sei  $x \in M$ . Wegen  $\frac{x}{1} = 0$  in  $T^{-1}M$  gibt es ein  $s \in T \subseteq S$  mit  $sx = 0$ , was  $\frac{x}{1} = 0$  in  $S^{-1}M$  zeigt. □

**Proposition 5.1.3.** [ $\rightarrow$ 2.2.8, 1.1.5(b)] Sei  $0 \rightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$  eine exakte Sequenz von  $R$ -Moduln [ $\rightarrow$ 1.1.4(d)]. Dann gilt  $\text{supp } M = (\text{supp } N) \cup (\text{supp } P)$ .

*Beweis.* Nach 1.2.12(a) besteht für alle  $\mathfrak{p} \in \text{spec } R$  die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow N_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{p}}} P_{\mathfrak{p}} \rightarrow 0.$$

von  $R_{\mathfrak{p}}$ -Moduln, wegen der  $M_{\mathfrak{p}} = 0 \iff (N_{\mathfrak{p}} = 0 \ \& \ P_{\mathfrak{p}} = 0)$  gilt.  $\square$

**Definition 5.1.4.** [ $\rightarrow$ 2.1.1] Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Die *Krulldimension* (kurz *Dimension*) von  $M$  ist definiert durch

$$\dim M := \dim_R M := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \exists \mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_n \in \text{supp } M : \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n\} \\ \in \{-1\} \cup \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\},$$

wobei das Supremum wieder in der geordneten Menge  $\{-1\} \cup \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  genommen wird. Beachte dabei die Warnung 5.1.5(d) unten.

*Bemerkung 5.1.5.* Sei  $M$  ein  $R$ -Modul.

(a)  $\dim M = -1 \xleftrightarrow{5.1.4} \text{supp } M = \emptyset \xleftrightarrow{2.2.12(a)} M = 0$

(b)  $\dim M \stackrel{2.2.1}{\leq} \dim R$

(c) Die Krulldimension von  $R$  als  $R$ -Modul ist wegen 2.2.12(b) nichts anderes als die Krulldimension von  $R$  als Ring.

(d) Ist  $R$  ein Körper und damit  $M$  ein  $R$ -Vektorraum, so gilt stets  $\dim V \leq 0$ , da  $\text{spec } K = \{(0)\}$ . Der Dimensionsbegriff für Vektorräume aus der linearen Algebra hat daher mit dem hiesigen Dimensionsbegriff kaum etwas zu tun. Um nicht durcheinanderzukommen, reservieren wir in diesem Skript die Abkürzung  $\dim$  ausschließlich für die Krulldimension und erwähnen explizit, wenn wir die Dimension im Sinne der linearen Algebra meinen, etwa indem wir von der „Vektorraumdimension“ reden.

**Proposition 5.1.6.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann gilt

$$\dim M = \sup\{\dim(R/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \text{supp } M\},$$

wobei das Supremum wieder in der geordneten Menge  $\{-1\} \cup \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  genommen wird.

*Beweis.* Für  $\mathfrak{p} \in \text{supp } M$  gilt nach 1.3.7 und 2.1.1

$$\dim(R/\mathfrak{p}) = \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \exists \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \in \text{spec } R : \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n\}$$

und wegen 5.1.2 daher

$$\dim(R/\mathfrak{p}) = \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \exists \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \in \text{supp } M : \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n\},$$

wobei die Suprema natürlich wieder in  $\{-1\} \cup \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  genommen werden. Daraus folgt leicht die Behauptung.  $\square$

**Proposition 5.1.7.** Es gebe eine exakte Sequenz  $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$  von  $R$ -Moduln. Dann gilt  $\dim M = \max\{\dim N, \dim P\}$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \dim M &\stackrel{5.1.6}{=} \sup\{\dim(R/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{supp} M\} \\ &\stackrel{5.1.3}{=} \sup\{\dim(R/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in (\operatorname{supp} N) \cup (\operatorname{supp} P)\} \\ &= \max\{\sup\{\dim(R/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{supp} N\}, \sup\{\dim(R/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{supp} P\}\} \\ &\stackrel{5.1.6}{=} \max\{\dim N, \dim P\} \end{aligned}$$

□

**Proposition 5.1.8.** Ist  $M$  ein  $R$ -Modul und  $I \subseteq R$  ein Ideal mit  $IM = 0$ , so gilt

$$\dim_R M = \dim_{R/I} M,$$

wobei rechts  $M$  als  $R/I$ -Modul aufgefasst wird.

*Beweis.* 5.1.1 und 1.3.7

□

**Satz 5.1.9.** Ist  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul, so gilt  $\dim M = \dim(R/\operatorname{ann} M)$ .

*Beweis.* 2.2.13 und 1.3.7

□

## 5.2 Cohen-Macaulay-Moduln

*Bemerkung 5.2.1.* Ist  $R$  ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul. Falls  $M \neq 0$ , so gilt

$$\dim M \stackrel{5.1.9}{=} \dim(R/\operatorname{ann} M) \stackrel{2.1.4(a)}{\underset{\operatorname{ann} M \subseteq \mathfrak{m}}{=}} \operatorname{ht}(\mathfrak{m}/\operatorname{ann} M) \stackrel{4.1.2(a)}{\underset{\operatorname{ann} M \subseteq \mathfrak{m}}{=}} \operatorname{ht}_{\mathfrak{m}} M$$

und daher  $0 \stackrel{2.1.3}{\leq} \dim M \stackrel{2.4.5}{<} \infty$ .

**Definition 5.2.2.** Sei  $R$  ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann nennen wir

$$\operatorname{dpt} M := \operatorname{dpt}_{\mathfrak{m}} M \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

[→4.2.1] die *Tiefe* von  $M$ .

*Bemerkung 5.2.3.* Sei  $R$  ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul. Dann gilt

$$\operatorname{dpt} M = \infty \stackrel{4.2.4}{\iff} \mathfrak{m}M = M \stackrel{1.1.21}{\iff} M = 0.$$

**Satz 5.2.4.** Sei  $R$  ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul. Falls  $M \neq 0$ , so gilt

$$0 \leq \text{dpt } M \leq \dim M < \infty.$$

Zum Vergleich: Falls  $M = 0$ , so gilt  $\text{dpt } M = \infty$  und  $\dim M = -1$ .

*Beweis.* Ist  $M \neq 0$ , so  $0 \stackrel{5.2.2}{\leq} \text{dpt } M \stackrel{5.2.2}{=} \text{dpt}_{\mathfrak{m}} M \stackrel{4.2.2}{\leq} \text{ht}_{\mathfrak{m}} M \stackrel{5.2.1}{=} \dim M \stackrel{5.2.1}{<} \infty$ . Ist  $M = 0$ , so  $\text{dpt } M \stackrel{5.2.3}{=} \infty$  und  $\dim M \stackrel{5.1.5(a)}{=} -1$ .  $\square$

**Definition 5.2.5.** [ $\rightarrow$ 5.2.4] Ein endlich erzeugter Modul über einem lokalen noetherschen Ring heißt ein *Cohen-Macaulay-Modul* (kurz: *CM-Modul*), wenn seine Tiefe und Krulldimension übereinstimmen.

*Beispiel 5.2.6.* Endlich erzeugte nulldimensionale Moduln über lokalen noetherschen Ringen sind CM-Moduln.

**Satz 5.2.7.** Sei  $R$  ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$ ,  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul,  $d, r \in \mathbb{N}_0$  und  $a_1, \dots, a_r$  eine Nichtnullteilerfolge in  $\mathfrak{m}$  für  $M$  [ $\rightarrow$ 4.1.7]. Dann sind äquivalent:

- (a)  $M$  ist ein CM-Modul der Krulldimension  $d$
- (b)  $M / \sum_{i=1}^r a_i M$  ist ein CM-Modul der Krulldimension  $d - r$

*Beweis.* Aus der zweiten Fassung des Nakayama-Lemmas 1.1.21 erhält man leicht

$$M = 0 \iff M / \sum_{i=1}^r a_i M = 0.$$

Ausserdem ist mit  $M$  auch  $M / \sum_{i=1}^r a_i M$  endlich erzeugt. Nun folgt unter Beachtung von Bemerkung 5.2.1 alles leicht aus den Sätzen 4.1.9 und 4.2.12.  $\square$

*Bemerkung 5.2.8.* <sup>1</sup>[ $\rightarrow$ 4.1.2(b)] Sei  $R$  ein Ring,  $I \subseteq R$  ein Ideal und  $M$  ein  $R$ -Modul. Ist  $J \subseteq R$  ein weiteres Ideal und gilt  $JM = 0$ , so  $\text{dpt}_I M = \text{dpt}_{(I+J)/J} M$ , wobei rechts  $M$  als  $R/J$ -Modul aufgefasst wird. Dies folgt sofort aus 4.1.8(b).

**Proposition 5.2.9.** Seien  $R$  ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$ ,  $I \subseteq \mathfrak{m}$  ein Ideal von  $R$  und  $M$  ein  $R$ -Modul mit  $IM = 0$ . Dann sind äquivalent:

- (a)  $M$  ist ein CM-Modul über  $R$ .
- (b)  $M$  ist ein CM-Modul über  $R/I$ .

*Beweis.*  $R/I$  ist ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}/I$ . Benutze nun 5.1.8 und 5.2.8 und beachte, dass  $M$  trivialerweise als  $R$ -Modul genau dann endlich erzeugt ist, wenn er als  $R/I$ -Modul endlich erzeugt ist.  $\square$

<sup>1</sup>Diese Bemerkung sollte in zukünftigen Versionen dieses Skripts besser nach Definition 4.2.1 kommen.

**Satz 5.2.10** (Ungemischtheitssatz). Sei  $M$  ein CM-Modul über  $R$  mit  $\dim M = d$ . Für alle  $\mathfrak{p} \in \text{ass } M$  gilt dann  $\dim(R/\mathfrak{p}) = d$ .

*Beweis.* Es ist  $M \neq 0$  und somit  $d \in \mathbb{N}_0$ . Wir machen Induktion nach  $d$ :

$d = 0$  Wegen  $\dim(R/\text{ann } M) \stackrel{5.1.9}{=} \dim M = 0$ , 1.3.7 und 2.2.19 gilt

$$\text{ass } M = (\text{ass } M)^{\min} = \{\mathfrak{m}\}.$$

Nach 2.1.2(b) gilt  $\dim(R/\mathfrak{m}) = 0$ , da  $R/\mathfrak{m}$  nach A2.4.4(b) ein Körper ist.

$d - 1 \rightarrow d$  ( $d \in \mathbb{N}$ ) Sei  $\mathfrak{p} \in \text{ass } M$ . Dann gilt natürlich  $\text{ann } M \subseteq \mathfrak{p}$  und daher

$$\dim(R/\mathfrak{p}) \leq \dim(R/\text{ann } M) \stackrel{5.1.9}{=} \dim M = d.$$

Zu zeigen bleibt  $\dim(R/\mathfrak{p}) \geq d$ . Wegen  $\text{dpt}_{\mathfrak{m}} M = \text{dpt } M = d \geq 1$  gibt es ein  $a \in \mathfrak{m}$ , welches kein Nullteiler für  $M$  ist. Nach Satz 5.2.7 ist  $M/aM$  ein CM-Modul der Krulldimension  $d - 1$ . Das Ideal  $\mathfrak{p} + (a) \subseteq \mathfrak{m}$  besitzt nach 1.3.5 und 1.3.7 ein minimales Primoberideal  $\mathfrak{q}$ . Der Satz von Matsumura 4.2.7 liefert  $\mathfrak{q} \in \text{ass}(M/aM)$ . Die Induktionsvoraussetzung angewandt auf  $M/aM$  und  $\mathfrak{q}$  liefert  $\dim(R/\mathfrak{q}) = d - 1$ . Sicher gilt  $a \notin \mathfrak{p}$ , denn nach 2.2.5 ist jedes Element von  $\mathfrak{p}$  ein Nullteiler für  $M$ . Daraus folgt  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ . Aus Definition 2.1.1 und 1.3.7 folgt daher  $\dim(R/\mathfrak{p}) \geq \dim(R/\mathfrak{q}) + 1 = (d - 1) + 1 = d$ .  $\square$

**Korollar 5.2.11.** Ist  $M$  ein CM-Modul über  $R$ , so gilt  $\text{ass } M = (\text{ass } M)^{\min}$ .

## 5.3 Kettenringe

**Proposition 5.3.1.** Sei  $R$  ein noetherscher Ring. Dann gibt es in (der bezüglich Inklusion halbgeordneten Menge)  $\text{spec } R$  keine unendliche Kette, das heißt  $R$  besitzt nicht unendlich viele paarweise bezüglich Inklusion vergleichbare Primideale.

*Beweis.* Angenommen  $C$  ist eine unendliche Kette in  $\text{spec } R$ . Besitzt  $C$  kein größtes Element, so dann erhält man leicht eine aufsteigende Kette

$$\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}_3 \subset \dots$$

von Primidealen von  $R$ . Besitzt  $C$  hingegen ein größtes Element  $\mathfrak{p}$ , so  $\text{ht } \mathfrak{p} = \infty$  im Widerspruch zu 2.4.5, da  $C$  als unendliche Kette natürlich beliebig lange endliche Ketten enthält.  $\square$

*Bemerkung 5.3.2.* Sei  $M$  eine halbgeordnete Menge. Man zeigt leicht, dass in  $M$  jede Kette in einer maximalen Kette enthalten ist. Im allgemeinen Fall wendet man hierzu das Zornsche Lemma an auf die durch Inklusion halbgeordnete Menge der Ketten in  $M$ . Wenn es in  $M$  keine unendlichen Ketten gibt [ $\rightarrow$ 5.3.1], so kann man das auch leicht ohne das Zornsche Lemma bewerkstelligen.

**Notation 5.3.3.** [→1.2.14] Ist  $M$  eine durch  $\preceq$  halbgeordnete Menge und sind  $a, b \in M$ , so schreiben wir

$$\begin{aligned} M_a^b &:= \{c \in M \mid a \preceq c \preceq b\}, \\ M_a &:= \{c \in M \mid a \preceq c\} \text{ und} \\ M^b &:= \{c \in M \mid c \preceq b\}. \end{aligned}$$

**Definition 5.3.4.** [→5.3.1] Wir nennen einen noetherschen Ring  $R$  einen *Kettenring*, wenn für alle  $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \text{spec } R$  und alle maximalen Ketten  $C$  und  $D$  in  $(\text{spec } R)_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}}$  gilt  $\#C = \#D$ .<sup>2</sup>

**Satz 5.3.5.** *Quotienten und Lokalisierungen von Kettenringen sind wieder Kettenringe.*

*Beweis.* 1.2.12(f), 1.2.19 und 1.3.7 □

**Proposition 5.3.6.** *Sei  $R$  ein noetherscher Ring mit der Eigenschaft, dass für alle maximalen Ketten  $C$  und  $D$  in  $\text{spec } R$  gilt  $\#C = \#D$ . Dann ist  $R$  ein Kettenring.*

*Beweis.* Seien  $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \text{spec } R$  und  $C$  und  $D$  maximale Ketten in  $(\text{spec } R)_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}}$ . Zu zeigen ist  $\#C = \#D$ . Gilt  $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}$ , so gilt  $(\text{spec } R)_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}} = \emptyset$  und damit  $C = \emptyset = D$ . Gilt  $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ , so gilt  $(\text{spec } R)_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}} = \{\mathfrak{p}\}$  und damit  $C = \{\mathfrak{p}\} = D$ . Also  $\mathbb{C} \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ . Wähle nun gemäß Bemerkung 5.3.2 eine maximale Kette  $A$  in  $(\text{spec } R)_{\mathfrak{p}}$  und eine maximale Kette  $B$  in  $(\text{spec } R)_{\mathfrak{q}}$ . Nach Proposition 5.3.1 sind  $A, B, C$  und  $D$  jeweils endliche Mengen. Offenbar gilt  $A \cap C = \{\mathfrak{p}\}$ ,  $B \cap C = \{\mathfrak{q}\}$  und  $A \cap C = \emptyset$ . Also gilt

$$\begin{aligned} \#C &= \#(A \cup C \cup B) - \#(A \cup B) + 2 \quad \text{und analog} \\ \#D &= \#(A \cup D \cup B) - \#(A \cup B) + 2. \end{aligned}$$

Es reicht daher  $\#(A \cup C \cup B) = \#(A \cup D \cup B)$  zu zeigen. Dies folgt aus der vorausgesetzten Eigenschaft von  $R$ , dass  $A \cup C \cup B$  und  $A \cup D \cup B$  maximale Ketten in  $\text{spec } R$  sind. Wir zeigen dies nur für  $A \cup C \cup B$ , da es für  $A \cup D \cup B$  dann analog geht: Sei hierzu  $\mathfrak{r} \in \text{spec } R$  derart, dass  $A \cup C \cup B \cup \{\mathfrak{r}\}$  eine Kette in  $\text{spec } R$  ist. Wegen  $\{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}\} \subseteq A \cup C \cup B$  gilt dann  $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{q}$  oder  $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{r}$ . Also gilt  $A \cup \{\mathfrak{r}\} \subseteq (\text{spec } R)_{\mathfrak{p}}$ ,  $C \cup \{\mathfrak{r}\} \subseteq (\text{spec } R)_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}}$  oder  $B \cup \{\mathfrak{r}\} \subseteq (\text{spec } R)_{\mathfrak{q}}$ . Wegen der Maximalität von  $A, C$  und  $B$ , folgt dann  $\mathfrak{r} \in A$ ,  $\mathfrak{r} \in C$  oder  $\mathfrak{r} \in B$ . □

**Satz 5.3.7.** *Sei  $M$  ein CM-Modul über  $R$ . Dann ist  $R/\text{ann } M$  ein Kettenring und für jede maximale Kette  $C$  in  $\text{spec}(R/\text{ann } M)$  gilt  $\#C = (\dim M) + 1$ .*

*Beweis.* Setze  $d := \dim(R/\text{ann } M) \stackrel{5.1.9}{=} \dim M \stackrel{5.2.1}{\in} \mathbb{N}_0$ . Nach Proposition 5.3.6 reicht es zu zeigen, dass für alle maximalen Ketten  $C$  in  $\text{spec}(R/\text{ann } M)$  gilt  $\#C = d + 1$ . Hierbei ist „ $\leq$ “ trivial. Mit 1.3.7 ist also zu zeigen, dass für alle maximalen Ketten  $C$  in  $\{\mathfrak{p} \in \text{spec } R \mid \text{ann } M \subseteq \mathfrak{p}\}$  gilt  $\#C \geq d + 1$ . Dies zeigen wir durch Induktion nach  $d$ :

<sup>2</sup>In einer späteren Version dieses Skripts wäre es eventuell schöner, Kettenringe über die in Satz 5.3.6 unten vorausgesetzte Eigenschaft zu definieren und dann die Eigenschaft aus dieser Definition in Satz 5.3.6 zu zeigen.

$d = 0$  klar nach Definition 2.1.1

$d - 1 \rightarrow d$  ( $d \in \mathbb{N}$ ) Sei  $C$  eine maximale Kette in  $\{\mathfrak{p} \in \text{spec } R \mid \text{ann } M \subseteq \mathfrak{p}\}$ . Wegen  $\overline{M} \neq 0$  gilt  $1 \notin \text{ann } \overline{M}$  und daher  $\text{ann } M \subseteq \mathfrak{m}$ , wobei  $\mathfrak{m}$  das maximale Ideal des lokalen noetherschen Ringes  $R$  bezeichne. Schreibe  $C = \{\mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_\ell\}$  mit  $\ell := \#C - 1$  und  $\mathfrak{p}_0 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{p}_\ell$ . Dann gilt  $\mathfrak{p}_\ell = \mathfrak{m}$  und wegen  $d \geq 1$  somit  $\ell \geq 1$ . Wir behaupten, dass es ein  $a \in R$  gibt mit den folgenden Eigenschaften:

- (a)  $M/aM$  ist ein CM-Modul über  $R$  mit  $\dim(M/aM) = d - 1$ .
- (b)  $C \setminus \{\mathfrak{p}_0\}$  ist eine maximale Kette in  $\{\mathfrak{p} \in \text{spec } R \mid \text{ann}(M/aM) \subseteq \mathfrak{p}\}$ .

Wenn wir das gezeigt haben, folgt mit der Induktionsvoraussetzung angewandt auf  $M/aM$ , dass  $\#C - 1 = \#(C \setminus \{\mathfrak{p}_0\}) \geq (d - 1) + 1 = d$  und daher  $\#C \geq d + 1$  wie gewünscht. Hierzu reicht es ein  $a \in R$  zu finden mit:

- (c)  $a \in \mathfrak{p}_1$  und  $a$  ist kein Nullteiler für  $M$ .
- (d)  $\mathfrak{p}_1$  ist ein minimales Primoberideal von  $\text{ann}(M/aM)$ .

In der Tat impliziert (c) nach Satz 5.2.7 die Bedingung (a). Dies bliebe sogar richtig, wenn man in (c) nur  $a \in \mathfrak{m}$  statt  $a \in \mathfrak{p}_1$  fordern würde. Weil mit (b) automatisch  $a \in \text{ann}(M/aM) \subseteq \mathfrak{p}_1$  gilt, brauchen wir aber ohnehin  $a \in \mathfrak{p}_1$ . Für das Folgende halten wir fest, dass wegen der Maximalität von  $C$  gilt

$$(*) \quad \mathfrak{p}_0 \in \{\mathfrak{p} \in \text{spec } R \mid \text{ann } M \subseteq \mathfrak{p}\}^{\min} \stackrel{2.2.19}{=} (\text{ass } M)^{\min} \subseteq \text{ass } M.$$

Als nächstes zeigen wir die überraschende Tatsache, dass jedes  $a$  wie in (c) automatisch (d) erfüllt: Erfülle  $a$  also (c) und damit wie bereits bemerkt (a). Wegen (\*) und 2.2.5 gilt dann  $a \notin \mathfrak{p}_0$ . Wieder wegen der Maximalität von  $C$  ist daher  $\mathfrak{p}_1$  ein minimales Primoberideal von  $\mathfrak{p}_0 + (a)$  in  $R$ . Aus dem Satz von Matsumura 4.2.7 folgt also

$$\mathfrak{p}_1 \in \text{ass}(M/aM) \stackrel{5.2.11}{\underset{(a)}{=}} (\text{ass}(M/aM))^{\min},$$

was nach 2.2.19 die Bedingung (d) impliziert.

Um schließlich ein  $a \in R$  mit (c) zu finden, ist nach 2.2.5 zu zeigen, dass  $\mathfrak{p}_1 \not\subseteq \bigcup \text{ass } M \stackrel{5.2.11}{=} \bigcup (\text{ass } M)^{\min}$ . Wäre  $\mathfrak{p}_1 \subseteq \bigcup (\text{ass } M)^{\min}$ , so gäbe es wegen der aus 2.2.19 folgenden Endlichkeit von  $\text{ass } M$  nach 1.3.4(c) ein  $\mathfrak{q} \in (\text{ass } M)^{\min}$  mit  $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{q}$  im Widerspruch zu (\*) und  $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1$ .  $\square$

**Definition 5.3.8.** [ $\rightarrow$ 5.2.5] Ein Ring heißt ein *Cohen-Macaulay-Ring* (kurz: *CM-Ring*), wenn er ein CM-Modul über sich selbst ist, das heißt wenn er lokal und noethersch ist und wenn seine Tiefe als Modul über sich selbst [ $\rightarrow$ 5.2.2] und seine Krulldimension (als Modul über sich selbst oder als Ring [ $\rightarrow$ 5.1.5(c)]) übereinstimmen

*Beispiel 5.3.9.* Nach 5.1.5(c) und 5.2.6 sind nulldimensionale lokale noethersche Ringe stets CM-Ringe. Insbesondere sind Körper CM-Ringe.

**Korollar 5.3.10.** [ $\rightarrow$ 5.3.7] Sei  $R$  ein CM-Ring. Dann ist  $R$  ein Kettenring und für jede maximale Kette  $C$  in  $\text{spec } R$  gilt  $\#C = (\dim R) + 1$ .



## 5.4 CM-Ringe und Parametersysteme

**Korollar 5.4.1.** [ $\rightarrow$ 5.2.9] Seien  $R$  ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und  $I \subseteq \mathfrak{m}$  ein Ideal von  $R$ . Dann sind äquivalent:

- (a)  $R/I$  ist ein CM-Modul über  $R$ .
- (b)  $R/I$  ist ein CM-Ring.

**Korollar 5.4.2.** [ $\rightarrow$ 5.2.7] Sei  $R$  ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$ ,  $d, r \in \mathbb{N}_0$  und  $a_1, \dots, a_r$  eine Nichtnullteilerfolge in  $\mathfrak{m}$  für den  $R$ -Modul  $R$ . Dann sind äquivalent:

- (a)  $R$  ist ein CM-Ring der Krulldimension  $d$ .
- (b)  $R/(a_1, \dots, a_r)$  ist ein CM-Ring der Krulldimension  $d - r$ .

**Satz 5.4.3.** Sei  $R$  ein lokaler noetherscher Ring mit Parametersystem [ $\rightarrow$ §2.5]  $a_1, \dots, a_n$ . Dann ist  $R$  genau dann ein CM-Ring, wenn  $a_1, \dots, a_n$  eine Nichtnullteilerfolge für den  $R$ -Modul  $R$  bilden.

*Beweis.* Bilden  $a_1, \dots, a_n$  eine Nichtnullteilerfolge für den  $R$ -Modul  $R$ , so gilt

$$n \stackrel{5.2.2}{\leq} \text{dpt } R \stackrel{5.2.4}{\leq} \dim R \stackrel{2.5.1}{=} n$$

und daher  $\text{dpt } R = \dim R$ , was gemäß Definition 5.3.8 bedeutet, dass  $R$  ein CM-Ring ist. Für die umgekehrte Richtung führen wir Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$n = 0$  ✓

$n - 1 \rightarrow n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) Sei  $R$  ein CM-Ring. Zu zeigen ist gemäß Bemerkung 4.1.8(a):

- (a)  $a_1$  ist kein Nullteiler für den  $R$ -Modul  $R$ .
- (b)  $a_2, \dots, a_n$  bilden eine Nichtnullteilerfolge für den  $R$ -Modul  $R/a_1R$ .

Wir zeigen (a) mittels 2.2.5. Sei hierzu  $\mathfrak{p} \in \text{ass } M$ . Zu zeigen ist  $a_1 \notin \mathfrak{p}$ . Nach dem Ungemischtheitssatz 5.2.10 gilt  $\dim(R/\mathfrak{p}) = n$ , weshalb die Restklassen von  $a_1, \dots, a_n$  in  $R/\mathfrak{p}$  ein Parametersystem für den lokalen noetherschen Ring  $R/\mathfrak{p}$  bilden, wie man leicht sieht. Nach 2.5.4(e) gilt insbesondere  $\dim((R/\mathfrak{p})/(\overline{a_1})) = n - 1$ , was unmöglich mit  $a_1 \in \mathfrak{p}$  vereinbar wäre.

Nun zeigen wir (b). Nach Korollar 5.4.2 und (a) ist  $R/(a_1)$  ein CM-Ring der Krulldimension  $n - 1$  und die Restklassen von  $a_2, \dots, a_n$  bilden nach 2.5.4(e) ein Parametersystem davon. Mit Induktionsvoraussetzung folgt, dass die Restklassen von  $a_2, \dots, a_n$  in  $R/(a_1)$  eine Nichtnullteilerfolge für den  $R/(a_1)$ -Modul  $R/(a_1)$  bilden. Daraus folgt (b) mit Bemerkung 4.1.8(b).  $\square$

## 5.5 Lokalisierung von CM-Ringen

**Satz 5.5.1.** Sei  $M$  ein CM-Modul und  $\mathfrak{p} \in \text{supp } M$ . Dann ist auch  $M_{\mathfrak{p}}$  ein CM-Modul.

*Beweis.* Wir bemerken vorweg, dass mit dem  $R$ -Modul  $M$  auch der  $R_{\mathfrak{p}}$ -Modul  $M_{\mathfrak{p}}$  nach 1.2.12(e) endlich erzeugt ist. Weiter ist mit dem Ring  $R$  nach 1.2.12(f) auch der Ring  $R_{\mathfrak{p}}$  noethersch. Beachte auch, dass  $R_{\mathfrak{p}}$  nach 1.2.23 lokal mit maximalem Ideal  $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$  ist. Wegen 5.1.6 gilt  $\dim(R/\mathfrak{p}) \leq k := \dim M < \infty$ . Wir führen Induktion nach  $k$ :

$k = \dim(R/\mathfrak{p})$  Es gilt offenbar  $\mathfrak{p} \in (\text{supp } M)^{\min}$ . Nach 2.2.16 folgt daraus

$$\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \in (\text{supp } M_{\mathfrak{p}})^{\min}.$$

Nach 2.2.13 ist somit  $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$  ein minimales Primoberideal von  $\text{ann}(M_{\mathfrak{p}})$ . Weil  $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$  das maximale Ideal des lokalen Ringes  $R_{\mathfrak{p}}$  ist, ist  $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$  sogar das einzige Primoberideal von  $\text{ann}(M_{\mathfrak{p}})$ . Nach 2.2.13 gilt also  $\text{supp}(M_{\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}\}$  und es folgt mit 5.1.6

$$\dim M_{\mathfrak{p}} = \dim(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}) \stackrel{2.1.2(b)}{=} 0,$$

womit nach 5.2.6  $M_{\mathfrak{p}}$  ein CM-Modul ist.

$k - 1 \rightarrow k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > \dim(R/\mathfrak{p})$ ) Nach dem Ungemischtheitssatz 5.2.10 gilt

$$\dim M = \dim(R/\mathfrak{q})$$

für alle  $\mathfrak{q} \in \text{ass } M$ , während  $\dim M = k > \dim(R/\mathfrak{p})$  gilt. Also ist  $\mathfrak{p}$  in keinem der nach 2.2.18 nur endlich vielen zu  $M$  assoziierten Primideale enthalten. Mit 1.3.4(c) folgt  $\mathfrak{p} \not\subseteq \bigcup \text{ass } M$ . Nach 2.2.5 gibt es also ein  $a \in \mathfrak{p}$ , welches kein Nullteiler für  $M$  ist. Nach 5.2.7 ist  $M/aM$  ein CM-Modul der Dimension  $(\dim M) - 1$ . Wir wollen die Induktionsvoraussetzung auf  $M/aM$  und  $\mathfrak{p}$  anwenden und zeigen dazu  $\mathfrak{p} \in \text{supp}(M/aM)$ : Es gilt  $\text{ann } M + (a) \subseteq \mathfrak{p}$  und daher nach 4.1.3 sogar  $\text{ann}(M/aM) \subseteq \mathfrak{p}$ . Nach 2.2.13 gilt also tatsächlich  $\mathfrak{p} \in \text{supp}(M/aM)$ . Nach Induktionsvoraussetzung ist somit

$$(M/aM)_{\mathfrak{p}} \stackrel{1.2.13}{\cong} M_{\mathfrak{p}}/(aM)_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}/\frac{a}{1}M_{\mathfrak{p}}$$

ein CM-Modul. Nun ist  $\frac{a}{1} \in \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$  nach 4.2.6 kein Nullteiler für  $M_{\mathfrak{p}}$ , weshalb  $M_{\mathfrak{p}}$  nach 5.2.7 ein CM-Modul ist.  $\square$

**Korollar 5.5.2.** Lokalisierungen von CM-Ringen nach Primidealen sind wieder CM-Ringe.

## 5.6 Reguläre lokale Ringe sind Integritätsringe

**Sprechweise 5.6.1.** Sei  $R$  ein lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann ist  $M/\mathfrak{m}M$  in natürlicher Weise ein  $R/\mathfrak{m}$ -Vektorraum. Wir nennen diesen den Restklassenraum von  $M$ .

**Proposition 5.6.2.** Sei  $R$  ein lokaler Ring,  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul und  $x_1, \dots, x_n \in M$ . Dann sind äquivalent:

(a)  $M$  wird durch  $x_1, \dots, x_n$  erzeugt.

(b) Der Restklassenraum von  $M$  wird durch die Restklassen der  $x_1, \dots, x_n$  erzeugt.

*Beweis.* (a)  $\implies$  (b) ist trivial. Für (b)  $\implies$  (a) benutzen wir die zweite Fassung 1.1.21 des Nakayama-Lemmas: Gelte (b). Dann gilt für  $N := M / \sum_{i=1}^n Rx_i$ , dass  $\mathfrak{m}N = N$ , wobei  $\mathfrak{m}$  das maximale Ideal von  $R$  bezeichne, und daher  $N = 0$ , da mit  $M$  auch  $N$  endlich erzeugt ist. Also  $M = \sum_{i=1}^n Rx_i$ .  $\square$

**Sprechweise 5.6.3.** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Wir sagen, dass  $x_1, \dots, x_n \in M$  ein *minimales Erzeugendensystem* von  $M$  bilden, wenn  $x_1, \dots, x_n$  ein Erzeugendensystem von  $M$  bilden, aber  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  für kein  $i \in \{1, \dots, n\}$  ein Erzeugendensystem von  $M$  bilden. Wir nennen ein Element  $x \in M$  *basisch*, wenn es  $x_1, \dots, x_n \in M$  gibt so, dass  $x, x_1, \dots, x_n$  ein minimales Erzeugendensystem von  $M$  bilden.

*Beispiel 5.6.4.* Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Dann bilden  $x_1, \dots, x_n \in V$  genau dann ein *minimales Erzeugendensystem* von  $V$ , wenn sie eine Basis von  $V$  bilden [ $\rightarrow$ LA6.2.1(c)]. Weiter ist wegen des Basisergänzungssatzes [ $\rightarrow$ LA6.2.20] ein Element  $x \in V$  genau dann basisch, wenn  $V$  endlichdimensional [ $\rightarrow$ LA6.2.25(c)] im Sinne der linearen Algebra ist und  $x \neq 0$  gilt.

**Satz 5.6.5.** Sei  $R$  ein lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul. Dann gilt:

- (a) Elemente  $x_1, \dots, x_n \in M$  bilden genau dann ein minimales Erzeugendensystem von  $M$ , wenn ihre Restklassen eine Basis des Restklassenraumes von  $M$  bilden.
- (b) Es gibt ein minimales Erzeugendensystem  $x_1, \dots, x_n$  von  $M$  und für jedes solche ist stets die Vektorraumdimension des Restklassenraumes von  $M$ .
- (c) Ein Element  $x \in M$  ist genau dann basisch, wenn  $x \notin \mathfrak{m}M$ .

*Beweis.* 5.6.2, 5.6.3, 5.6.4  $\square$

**Definition 5.6.6.** Sei  $R$  ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$ . Dann nennt man

$$\text{edim } R := \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \exists a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{m} : \mathfrak{m} = (a_1, \dots, a_n)\} \in \mathbb{N}_0$$

die *Einbettungsdimension* von  $R$ .

**Satz 5.6.7.** Sei  $R$  ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$ .

- (a) Die Einbettungsdimension von  $R$  stimmt mit der Vektorraumdimension des  $R/\mathfrak{m}$ -Vektorraums  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  überein.
- (b) Die Krulldimension von  $R$  ist höchstens so groß wie die Einbettungsdimension von  $R$ , das heißt  $\dim R \leq \text{edim } R$ .

*Beweis.* (a) folgt aus 5.6.5(b) und (b) aus dem Höstensatz von Krull 2.4.4.  $\square$

**Definition 5.6.8.** Ein *regulärer lokaler Ring* ist ein lokaler noetherscher Ring  $R$  mit  $\dim R = \text{edim } R$ .

*Bemerkung 5.6.9.* Die nulldimensionalen regulären lokalen Ringe sind genau die Körper.

**Satz 5.6.10.** Sei  $R$  ein regulärer lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und  $a \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ . Dann ist  $R/(a)$  wieder ein regulärer lokaler Ring mit  $(\dim R/(a)) + 1 = \dim R$ .

*Beweis.* Es ist  $a$  nach Voraussetzung ein basisches Element des  $R$ -Moduls  $\mathfrak{m}$ , weswegen es  $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{m}$  gibt derart, dass  $a, a_1, \dots, a_n$  ein minimales Erzeugendensystem des  $R$ -Moduls  $\mathfrak{m}$  bilden. Es gilt nun

$$1 + n \stackrel{5.6.5(b)}{=} \text{edim } R \stackrel{5.6.8}{=} \dim R.$$

Betrachte den kanonischen Epimorphismus  $R \rightarrow R/\mathfrak{m}$ ,  $a \mapsto \bar{a}$ . Nach 1.3.7 ist  $R/(a)$  ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}/Ra = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ . Es gilt also

$$\begin{aligned} n &= (\dim R) - 1 \stackrel{2.1.4(a)}{=} (\text{ht } \mathfrak{m}) - 1 \stackrel{2.4.6}{\leq} \text{ht}(\mathfrak{m}/Ra) \\ &\stackrel{2.1.4(a)}{=} \dim(R/(a)) \stackrel{5.6.7(b)}{\leq} \text{edim}(R/(a)) \leq n \end{aligned}$$

$\square$

**Lemma 5.6.11.** Sei  $R$  ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und es gebe ein Hauptideal in  $(\text{spec } R) \setminus (\text{spec } R)^{\min}$ . Dann ist  $R$  ein Integritätsring.

*Beweis.* Wähle  $a \in R$  mit  $(a) \in (\text{spec } R) \setminus (\text{spec } R)^{\min}$ . Dann gilt natürlich  $a \in \mathfrak{m}$ . Wegen  $(a) \in \text{spec } R$  können wir gemäß 1.3.5  $\mathfrak{p} \in (\text{spec } R)^{\min}$  mit  $\mathfrak{p} \subseteq (a)$  wählen. Wegen  $(a) \notin (\text{spec } R)^{\min}$  gilt  $a \notin \mathfrak{p}$ . Zu zeigen ist  $\mathfrak{p} = (0)$ . Nach der zweiten Fassung 1.1.21 des Nakayama-Lemmas reicht es zu zeigen, dass  $\mathfrak{m}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ . Sei also  $b \in \mathfrak{p}$ . Zu zeigen ist  $b \in \mathfrak{m}\mathfrak{p}$ . Wegen  $\mathfrak{p} \subseteq (a)$  gibt es  $c \in R$  mit  $b = ca$ . Wegen  $a \in \mathfrak{m}$  reicht es  $b \in \mathfrak{p}$  zu zeigen. Dies folgt aber aus  $ca = b \in \mathfrak{p}$  und  $a \notin \mathfrak{p}$ .  $\square$

**Lemma 5.6.12.** Sei  $R$  ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und  $\dim R > 0$ . Dann gilt

$$\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{m}^2 \cup \bigcup (\text{spec } R)^{\min}.$$

*Beweis.* Als noetherscher Ring besitzt  $R$  nach 2.2.22 nur endlich viele minimale Primideale. Nach 1.3.4(c) reicht es daher zu zeigen, dass  $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{m}^2$  und  $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{p}$  für alle  $\mathfrak{p} \in (\text{spec } R)^{\min}$ . Aus  $\dim R > 0$  folgt aber sogar  $\mathfrak{m}^2 \subset \mathfrak{m}$  und  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$  für alle  $\mathfrak{p} \in (\text{spec } R)^{\min}$ , denn letzteres folgt sofort aus  $\dim R > 0$  und ersteres sieht man wie folgt: Wäre  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ , so folgte aus der zweiten Fassung 1.1.21 des Nakayama-Lemmas  $\mathfrak{m} = (0)$  ebenfalls im Widerspruch zu  $\dim R > 0$ .  $\square$

**Satz 5.6.13.** *Reguläre lokale Ringe sind Integritätsringe.*

*Beweis.* Wir zeigen durch Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ , dass alle regulären lokalen Ringe  $R$  mit  $\dim R = n$  Integritätsringe sind.

$n = 0$  ist klar nach 5.6.9.

$n - 1 \rightarrow n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) Sei  $R$  ein regulärer lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und  $\dim R = n$ . Wegen  $n \geq 1$  können wir nach Lemma 5.6.12 ein

$$a \in \mathfrak{m} \setminus \left( \mathfrak{m}^2 \cup \bigcup (\text{spec } R)^{\min} \right)$$

wählen. Lemma 5.6.10 besagt, dass  $R/(a)$  wieder ein regulärer lokaler Ring ist mit  $\dim(R/(a)) = n - 1$ . Nach Induktionsvoraussetzung ist daher  $R/(a)$  ein Integritätsring und daher  $(a)$  ein Primideal. Da ausserdem  $(a)$  in keinem minimalen Primideal enthalten ist, haben wir sogar  $(a) \in (\text{spec } R) \setminus (\text{spec } R)^{\min}$ . Nach Lemma 5.6.11 ist also  $R$  ein Integritätsring.  $\square$

**Satz 5.6.14.** *Reguläre lokale Ringe sind CM-Ringe.*

*Beweis.* Wir zeigen durch Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ , dass alle regulären lokalen Ringe  $R$  mit  $\dim R = n$  CM-Ringe sind.

$n = 0$  ist klar nach 5.3.9.

$n - 1 \rightarrow n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) Sei  $R$  ein regulärer lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und  $\dim R = n$ . Wegen  $n \geq 1$  können wir nach Lemma 5.6.12 ein  $a \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$  wählen, was wegen  $a \neq 0$  nach Satz 5.6.13 natürlich kein Nullteiler in  $R$  ist. Lemma 5.6.10 besagt, dass  $R/(a)$  wegen  $a \in \mathfrak{m}^2 \setminus \mathfrak{m}$  wieder ein regulärer lokaler Ring ist mit  $\dim(R/(a)) = n - 1$ . Nach Induktionsvoraussetzung ist daher  $R/(a)$  ein CM-Ring. Mit 5.4.2 ist dann auch  $R$  ein CM-Ring.  $\square$

## 5.7 Lokalisierung von Polynomringen

**Lemma 5.7.1.** *Sei  $R$  ein regulärer lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und  $\mathfrak{p}$  ein Primideal des Polynomrings  $R[X]$  so, dass  $\mathfrak{p} \cap R = \mathfrak{m}$ . Dann ist auch  $R[X]_{\mathfrak{p}}$  ein regulärer lokaler Ring.*

*Beweis.* Mit  $R$  ist auch  $R[X]$  noethersch nach dem Hilbertschen Basissatz [ $\rightarrow$ A2.7.8] und damit auch  $R[X]_{\mathfrak{p}}$  nach 1.2.12(f). Es ist  $R[X]_{\mathfrak{p}}$  lokal mit maximalem Ideal  $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$  nach 1.2.23. Gemäß 5.6.8 bleibt zu zeigen  $\dim(R[X]_{\mathfrak{p}}) = \text{edim}(R[X]_{\mathfrak{p}})$ . Wir zeigen dazu, dass es  $n \in \{d, d + 1\}$  gibt mit

$$n \leq \dim(R[X]_{\mathfrak{p}}) \stackrel{5.6.7(b)}{\leq} \text{edim}(R[X]_{\mathfrak{p}}) \leq n,$$

wobei  $d := \dim R = \text{edim } R \in \mathbb{N}_0$ . Hierzu reicht es offenbar zu zeigen, dass es  $n \in \{d, d + 1\}$  gibt mit

$$(*) \quad \text{ht } \mathfrak{p} \geq n \ \& \ \exists p_1, \dots, p_n \in R[X] : \mathfrak{p} = (p_1, \dots, p_n).$$

Für jedes Ideal  $I$  von  $R$  bezeichne  $(I)_{R[X]}$  das davon erzeugte Ideal in  $R[X]$ , welches offensichtlich gerade aus den Polynomen mit Koeffizienten aus  $I$  besteht und für welches daher  $(I)_{R[X]} \cap R = I$  gilt. Ist  $I \in \text{spec } R$ , so gilt offensichtlich  $(I)_{R[X]} \in \text{spec } R[X]$ , denn wir haben eine kanonische Ringisomorphie  $R[X]/(I)_{R[X]} \cong (R/I)[X]$  und  $(R/I)[X]$  ist als Polynomring über dem Integritätsring  $R/I$  wieder ein Integritätsring. Wegen  $\dim R = d$  können wir  $\mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_d \in \text{spec } R$  wählen mit  $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_d = \mathfrak{m}$ . Es gilt dann offensichtlich  $(\mathfrak{p}_0)_{R[X]} \subset (\mathfrak{p}_1)_{R[X]} \subset \dots \subset (\mathfrak{p}_d)_{R[X]}$ . Weiter können wir wegen  $\text{edim } R = d$  Elemente  $a_1, \dots, a_d \in R$  mit  $\mathfrak{m} = (a_1, \dots, a_d)$  wählen. Offensichtlich wird dann das Ideal  $\mathfrak{p} = (\mathfrak{m})_{R[X]}$  in  $R[X]$  ebenfalls von  $a_1, \dots, a_d$  erzeugt. Gilt nun  $\mathfrak{p} = (\mathfrak{m})_{R[X]}$ , so sieht man sofort, dass (\*) für  $n := d$  gilt. Gelte also von nun an  $\mathfrak{p} \neq (\mathfrak{m})_{R[X]}$ . Dann zeigen wir, dass (\*) für  $n := d + 1$  gilt. Wegen  $\mathfrak{m} = \mathfrak{p} \cap R \subseteq \mathfrak{p}$  gilt  $(\mathfrak{m})_{R[X]} \subset \mathfrak{p}$ . Somit

$$(\mathfrak{p}_0)_{R[X]} \subset (\mathfrak{p}_1)_{R[X]} \subset \dots \subset (\mathfrak{p}_d)_{R[X]} = (\mathfrak{m})_{R[X]} \subset \mathfrak{p}$$

und daher  $\text{ht } \mathfrak{p} \geq d + 1$ . Betrachte nun den kanonischen Ringepimorphismus

$$\varphi: R[X] \rightarrow (R/\mathfrak{m})[X],$$

dessen Kern  $(\mathfrak{m})_{R[X]}$  in  $\mathfrak{p}$  enthalten ist, weswegen  $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{p}))$  gilt. Da  $R/\mathfrak{m}$  ein Körper ist, ist  $(R/\mathfrak{m})[X]$  ein Hauptidealring [ $\rightarrow$ LA10.2.2]. Daher ist das Ideal  $\varphi(\mathfrak{p})$  ein Hauptideal in  $(R/\mathfrak{m})[X]$ . Wegen der Surjektivität von  $\varphi$  können wir also  $p \in R[X]$  wählen mit  $\varphi(\mathfrak{p}) = (\varphi(p))$ . Dann ist das Bild des von  $p$  in  $R[X]$  erzeugten Hauptideals gleich  $\varphi(\mathfrak{p})$  und daher  $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{p})) = (p) + \ker \varphi = (p) + (\mathfrak{m})_{R[X]} = (p, a_1, \dots, a_d)$ .  $\square$

**Lemma 5.7.2.** Sei  $R$  ein Ring und  $\mathfrak{p}$  ein Primideal des Polynomrings  $R[X]$  so, dass  $R_{\mathfrak{p} \cap R}$  ein regulärer lokaler Ring ist. Dann ist auch  $R[X]_{\mathfrak{p}}$  ein regulärer lokaler Ring.

*Beweis.* Betrachte die multiplikative Menge  $S := R \setminus \mathfrak{p}$  in  $R$ . Dies ist auch eine multiplikative Menge in  $R[X]$  und man sieht leicht, dass man einen kanonischen Ringisomorphismus

$$\varphi: (S^{-1}R)[X] \xrightarrow{\cong} S^{-1}(R[X])$$

hat [ $\rightarrow$ LA3.2.13, A2.2.7, A2.3.7, 1.2.3]. Wegen  $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$  ist  $S^{-1}\mathfrak{p}$  nach 1.2.19 ein Primideal von  $S^{-1}(R[X])$  und damit  $\mathfrak{q} := \varphi^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p})$  ein Primideal von  $(S^{-1}R)[X]$ . Es gilt nun

$$((R_{\mathfrak{p} \cap R})[X])_{\mathfrak{q}} \underset{R_{\mathfrak{p} \cap R} = S^{-1}R}{\cong} ((S^{-1}R)[X])_{\mathfrak{q}} \underset{\varphi \text{ Iso.}}{\cong} (S^{-1}(R[X]))_{S^{-1}\mathfrak{p}} \underset{2.2.14}{\cong} R[X]_{\mathfrak{p}}.$$

Da  $R_{\mathfrak{p} \cap R}$  nach 1.2.23 ein lokaler Ring mit maximalem Ideal  $(\mathfrak{p} \cap R)_{\mathfrak{p} \cap R}$  ist und

$$(*) \quad \mathfrak{q} \cap R_{\mathfrak{p} \cap R} = (\mathfrak{p} \cap R)_{\mathfrak{p} \cap R}$$

gilt, wie wir gleich nachprüfen werden, ist der linksstehende Ring nach Lemma 5.7.1 ein regulärer lokaler Ring und damit auch der dazu isomorphe rechtsstehende Ring. Für den Nachweis von (\*) reicht es zu beobachten, dass

$$\frac{a}{s} \in \mathfrak{q} \iff \varphi\left(\frac{a}{s}\right) \in S^{-1}\mathfrak{p} \iff \frac{a}{s} \in S^{-1}\mathfrak{p} \iff \exists t \in S : ta \in \mathfrak{p} \iff a \in \mathfrak{p}$$

gilt für alle  $a \in R$  und  $s \in S$ . □

**Satz 5.7.3.** *Sei  $K$  ein Körper. Ist  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $\mathfrak{p} \in \text{spec } K[X_1, \dots, X_n]$ , so ist  $K[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{p}}$  ein regulärer lokaler Ring.*

*Beweis.* Induktion nach  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$n = 0$  Ist  $\mathfrak{p} \in \text{spec } K$ , so  $\mathfrak{p} = (0)$  und  $K[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{p}} \stackrel{1.2.21}{=} \text{qf}(K) = K$  ist ein Körper und damit ein regulärer lokaler Ring [ $\rightarrow$ 5.6.9].

$n - 1 \rightarrow n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) Es gilt  $K[X_1, \dots, X_n] = R[X_n]$  mit  $R := K[X_1, \dots, X_{n-1}]$ . Nach Lemma 5.7.2 reicht es daher zu zeigen, dass  $R_{\mathfrak{p} \cap R}$  ein regulärer lokaler Ring ist für alle  $\mathfrak{p} \in \text{spec } R[X_n]$ . Dies aber klar aus der Induktionsvoraussetzung, denn  $\mathfrak{p} \cap R \in \text{spec } R$ . □

**Korollar 5.7.4.** *Ist  $K$  ein Körper,  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $\mathfrak{p} \in \text{spec } K[X_1, \dots, X_n]$ , so ist  $K[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{p}}$  ein CM-Ring.*

*Beweis.* 5.7.3 und 5.6.14 □

**Korollar 5.7.5.** *Polynomringe in endlich vielen Variablen über Körpern sind Kettenringe.*

*Beweis.* Sei  $R$  ein solcher Polynomring. Nach dem Hilbertschen Basissatz [ $\rightarrow$ A2.7.9, AAG1.1.21] ist  $R$  dann noethersch. Aus Definition 5.3.4 ersieht man zusammen mit 1.2.20 jetzt sofort, dass es reicht zu zeigen, dass jede Lokalisierung von  $R$  nach einem Primideal ein Kettenring ist. Nach 5.7.4 ist aber eine solche Lokalisierung sogar ein CM-Ring und damit nach 5.3.10 ein Kettenring. □