Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2016

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 1 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1 (5P) (Jacobson-Radikal) Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Wir definieren das *Jacobson-Radikal* $J(M)$ von M als den Schnitt aller maximalen echten Untermoduln von M, also

$$J(M) := \bigcap \{N \mid N \text{ Untermodul von } M,\ M/N \text{ einfach}\},$$

wobei $\bigcap \emptyset := M$. Das Jacobson-Radikal $J(R)$ des Ringes R ist das Jacobson-Radikal von R als R-Modul. Sei von nun an R ein kommutativer Ring.

(a) Zeige, dass $J(R)$ ein Radikalideal von R ist.

Sei von nun an R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und M ein endlich erzeugter R-Modul.

(b) Zeige, dass $M/J(M)$ auf kanonische Weise ein $R/\mathfrak{m}$-Vektorraum ist.

(c) Zeige $J(M) = \mathfrak{m}M$.

(d) Sei $E \subseteq M$. Zeige, dass E genau dann M als R-Modul erzeugt, wenn

$$\overline{E} := \{\overline{x}^{J(M)} \mid x \in E\}$$

den R-Modul $M/J(M)$ erzeugt.

(e) Ist auch M stets ein freier Modul?

Aufgabe 2. (4P) (Artinsche Moduln müssen nicht noethersch sein) Sei R ein Ring. Ein R-Modul M heißt *artinsch*, wenn jede absteigende Kette

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq M_4 \supseteq \dots$$

von Untermoduln von M stationär wird. Zeige, dass $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(2)}$ ein artinscher $\mathbb{Z}$-Modul ist, der nicht noethersch ist. Hierbei ist $\mathbb{Z}_{(2)}$ der durch $\mathbb{Z}_{(2)} := (\mathbb{Z} \setminus (2))^{-1}\mathbb{Z} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ 2 \nmid b\}$ definierte Unterring von $\mathbb{Q}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3. (4P) Sei R ein kommutativer Ring. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) R ist lokal.

(b) $R \setminus R^\times$ ist ein Ideal in R.

(c) R besitzt genau ein maximales Ideal.

(d) R besitzt ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ mit $1 + \mathfrak{m} \subseteq R^\times$.

(e) $0 \neq 1$ in R und für jedes $a \in R$ gilt $a \in R^\times$ oder $a + 1 \in R^\times$.

Zeige, dass in diesem Fall $R \setminus R^\times$ das eindeutig bestimmte maximale Ideal von R ist.

Abgabe bis Freitag, den 22. April 2016, 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17 neben F411.