Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Markus Schweighofer

§4.2 Krulldimension von Ringen [Wolfgang Krull *1899 †1971]

In diesem Abschnitt sei stets A ein kommutativer Ring.

Definition 4.2.1. [→4.1.17] Die *Krulldimension* des Ringes A ist definiert durch

$$\dim A := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es gibt Primideale } \mathfrak{p}_0 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n \subset A\} \in \{-1\} \cup \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\},$$

wobei das Supremum in der geordneten Menge $\{-1\} \cup \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ genommen wird.

Bemerkung 4.2.2. (a) $\dim A = -1 \iff A = \{0\} \iff 1 = 0$ in A, denn ist $A \neq \{0\}$, so besitzt A ein Primideal (sogar ein maximales Ideal) [→A2.4.13].

(b) Ist A Integritätsring, so

$$\dim A = 0 \iff (0) \text{ maximales Ideal in } A \iff A \text{ Körper}.$$

(c) Ist A ein Hauptidealring, der kein Körper ist, dann $\dim A = 1$ [→A2.4.8].

Lemma 4.2.3. *Seien K ein Körper, A eine kommutative K-Algebra, $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_n$ Primideale von A mit $\mathfrak{p}_0 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$ und $x_1, \ldots, x_n \in A$ mit $x_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \mathfrak{p}_{i-1}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann sind $x_1, \ldots, x_n$ algebraisch unabhängig in A.*

Beweis. Induktion nach n.

$\underline{n = 0}$ Da $1 \notin \mathfrak{p}_0$ gilt $1 \neq 0$ in A, das heißt $\emptyset$ ist algebraisch unabhängig in A [→4.1.18].

$\underline{n - 1 \to n \ (n \in \mathbb{N})}$ Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf

$$(0) = \mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n/\mathfrak{p}_1 \text{ in } A/\mathfrak{p}_1 \qquad \text{und} \qquad \overline{x_2}^{\mathfrak{p}_1}, \ldots, \overline{x_n}^{\mathfrak{p}_1} \in A/\mathfrak{p}_1$$

liefert, dass $\overline{x_2}^{\mathfrak{p}_1}, \ldots, \overline{x_n}^{\mathfrak{p}_1}$ algebraisch unabhängig in $A/\mathfrak{p}_1$ sind. Sei nun $f \in K[\underline{X}] \setminus \{0\}$ mit $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{p}_0$. Es reicht, $g \in K[\underline{X}] \setminus \{0\}$ mit $\deg g < \deg f$ und $g(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{p}_0$ zu finden. Schreibe $f = X_1 g + h$ mit $g \in K[\underline{X}]$ und $h \in K[X_2, \ldots, X_n]$. Dann $h(\overline{x_2}^{\mathfrak{p}_1}, \ldots, \overline{x_n}^{\mathfrak{p}_1}) = f(0, \overline{x_2}^{\mathfrak{p}_1}, \ldots, \overline{x_n}^{\mathfrak{p}_1}) \overset{x_1 \in \mathfrak{p}_1}{=} f(\overline{x_1}^{\mathfrak{p}_1}, \ldots, \overline{x_n}^{\mathfrak{p}_1}) = \overline{f(x_1, \ldots, x_n)}^{\mathfrak{p}_1} = 0$ in $A/\mathfrak{p}_1$ und daher $h = 0$. Also $x_1 g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{p}_0$ und wegen $x_1 \notin \mathfrak{p}_0$ dann $g(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{p}_0$. Beachte $g \neq 0$, da sonst $f = 0$. □

Satz 4.2.4. *Sei K ein Körper und A eine kommutative K-Algebra. Dann* $\dim A \leq \operatorname{trdeg} A$.

Beweis. Direkt aus 4.2.3. □

Lemma 4.2.5. *Sei K ein Unterring des Körpers L und L ganz über K. Dann ist auch K ein Körper.*

Beweis. Sei $x \in K \setminus \{0\}$. Zu zeigen: $x \in K^\times$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in K$ mit $\left(\frac{1}{x}\right)^n + a_1 \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + \ldots + a_n = 0$. Dann $x(-(a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1})) = 1$. □

Lemma 4.2.6. *Sei A ein Unterring des kommutativen Ringes B, sei B ganz über A und A habe genau ein maximales Ideal $\mathfrak{p}$ (das heißt A ist lokal [→Z2.6.1]). Dann gilt für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von B, dass $\mathfrak{m} \cap A = \mathfrak{p}$.*

Beweis. Wende 4.2.5 auf $A/(\mathfrak{m} \cap A) \hookrightarrow B/\mathfrak{m}$, um zu sehen, dass $\mathfrak{m} \cap A$ ein maximales Ideal von A ist. □

Proposition 4.2.7 („Lying over“). *Sei A ein Unterring des kommutativen Ringes B und B ganz über A. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A. Dann gibt es ein Primideal $\mathfrak{q}$ von B mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$.*

Beweis. $S := A \setminus \mathfrak{p}$ ist eine multiplikative Teilmenge von A und von B. Betrachte die Lokalisierungen A_S und B_S von A und B nach S [→A2.3.17] und den Homomorphismus $A_S \to B_S$, $\frac{\overline{a}}{\overline{s}} \to \frac{\overline{a}}{\overline{s}}$ $(a \in A, s \in S)$ [→A2.3.18]. Dieser Homomorphismus ist injektiv und wir können A_S als Unterring von B_S sehen. Man sieht leicht (direktes Argument oder mit Z2.1.10), dass B_S ganz über A_S ist. Da die zu S disjunkten Primideale von A genau den Primidealen von A_S entsprechen [→A2.4.12], hat A_S genau ein maximales Ideal, nämlich $\overline{S}^{-1}\overline{\mathfrak{p}}$. Wähle ein maximales Ideal von B_S. Dieses ist von der Form $\overline{S}^{-1}\overline{\mathfrak{q}}$ für ein Primideal $\mathfrak{q}$ von B mit $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$ [→A2.4.12] und nach 4.2.6 gilt $\overline{S}^{-1}\overline{\mathfrak{q}} \cap A_S = \overline{S}^{-1}\overline{\mathfrak{p}}$. Schließlich gilt für $x \in A$ einerseits

$$\begin{aligned}
\overline{x} \in \overline{S}^{-1}\overline{\mathfrak{q}} \cap A_S &\iff \overline{x} \in \overline{S}^{-1}\overline{\mathfrak{q}} \\
&\iff \exists q \in \mathfrak{q} : \exists s \in S : \overline{xs} = \overline{q} \\
&\iff \exists q \in \mathfrak{q} : \exists s, t \in S : xst = qt \underset{s:=t:=1}{\overset{s,t \notin \mathfrak{q}}{\rightleftarrows}} x \in \mathfrak{q}
\end{aligned}$$

und andererseits analog $\overline{x} \in \overline{S}^{-1}\overline{\mathfrak{p}} \iff x \in \mathfrak{p}$. Es folgt also $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$. □

Proposition 4.2.8 („Going up“). *Sei A ein Unterring des kommutativen Ringes B, B ganz über A, $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A und I ein Ideal von B mit $I \cap A \subseteq \mathfrak{p}$. Dann gibt es ein Primideal $\mathfrak{q}$ von B mit $I \subseteq \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$.*

Beweis. Gehe von $A \subseteq B$ über zu $A/(I \cap A) \hookrightarrow B/I$ [→A2.4.11] und wende 4.2.7 an. □

Bemerkung 4.2.9. (a) In 4.2.8 ist die Voraussetzung $I \cap A \subseteq \mathfrak{p}$ offensichtlich unverzichtbar, denn

$$(I \subseteq \mathfrak{q} \ \& \ \mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A) \implies I \cap A \subseteq \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}.$$

(b) „Lying over“ ist der Spezialfall von „Going up“ mit $I = (0)$.

Lemma 4.2.10. *Sei A ein Unterring des Integritätsrings B und $\operatorname{qf}(B)$ algebraisch über $\operatorname{qf}(A)$ (zum Beispiel B ganz über A). Dann gilt für jedes Ideal $I \neq (0)$ von B, dass $I \cap A \neq (0)$.*

Beweis. Sei $x \in B \setminus \{0\}$. Zu zeigen: $(x) \cap A \neq (0)$. Offenbar gibt es $a_0, \dots, a_n \in A$ mit $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ mit $a_0 \neq 0$. □

Proposition 4.2.11. [→4.2.5] *Sei A ein Unterring des Integritätsrings B und B ganz über A. Dann A Körper $\iff$ B Körper.*

Beweis. „$\Longleftarrow$“ 4.2.5 „$\Longrightarrow$“ Nach 4.2.10 sind (0) und B die einzigen Ideale von B. □

Proposition 4.2.12. *Sei A ein Unterring des kommutativen Ringes B und B ganz über A. Seien $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ Primideale von B mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$. Dann $\mathfrak{p} \cap A \subset \mathfrak{q} \cap A$.*

Beweis. Œ $\mathfrak{p} = (0)$ (sonst gehe von $A \subseteq B$ zu $A/(\mathfrak{p} \cap A) \hookrightarrow B/\mathfrak{p}$ über). Wende nun 4.2.10 an. □

Satz 4.2.13. *Sei A ein Unterring des kommutativen Ringes B und B ganz über A.*

(a) Sind $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_n$ Primideale von A mit $\mathfrak{p}_0 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$, so gibt es Primideale $\mathfrak{q}_0, \dots, \mathfrak{q}_n$ von B mit $\mathfrak{q}_0 \subset \ldots \subset \mathfrak{q}_n$ und $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ für $i \in \{0, \dots, n\}$.

(b) Sind $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n$ Primideale von B mit $\mathfrak{q}_0 \subset \ldots \subset \mathfrak{q}_n$ und setzt man $\mathfrak{p}_i := \mathfrak{q}_i \cap A$ für $i \in \{0, \dots, n\}$, so gilt $\mathfrak{p}_0 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$.

Beweis. (a) Finde $\mathfrak{q}_0$ mit „Lying over“ 4.2.7 und $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots$ mit „Going up“ 4.2.8.

(b) 4.2.12

□

Korollar 4.2.14. [→4.1.29] *Sei A ein Unterring des kommutativen Ringes B und B ganz über A. Dann $\dim A = \dim B$.*

Satz 4.2.15 (Noetherscher Normalisierungssatz)**.** [Amalie Emmy Noether *1882 †1935] *Jede affine K-Algebra* [→1.1.19] *mit $0 \neq 1$ enthält eine Polynomalgebra über K* [→1.1.11], *über der sie ganz ist.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$ für alle Algebren der Form $K[x_1, \dots, x_n]$.
$\underline{n = 0}$ ✓
$\underline{n-1 \to n \quad (n \in \mathbb{N})}$ Sind $x_1, \dots, x_n$ K-algebraisch unabhängig, so ist nichts zu zeigen. Es gebe also $f \in K[\underline{X}] \setminus \{0\}$ mit $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. Schreibe $f = \sum_\alpha a_\alpha \underline{X}^\alpha$ mit $a_\alpha \in K$. Seien $e_2, \dots, e_n \in \mathbb{N}$ im Moment beliebig (später werden wir sie in Abhängigkeit von f festsetzen). Setze $y_2 := x_2 - x_1^{e_2}, \dots, y_n := x_n - x_1^{e_n}$. Dann gilt $x_2 = y_2 + x_1^{e_2}, \dots, x_n = y_n + x_1^{e_n}$ und daher $f(x_1, y_2 + x_1^{e_2}, \dots, y_n + x_1^{e_n}) = 0$. Da $f \notin K$ zeigt diese Gleichung, dass x_1 ganz über $K[y_2, \dots, y_n]$ ist, sofern $\alpha_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n \neq \beta_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $a_\alpha \neq 0 \neq a_\beta$. Wählt man $b \in \mathbb{N}$ groß genug und $e_i := b^i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$, so ist dies sicher gewährleistet. Da die Menge der

über $K[y_2,\ldots,y_n]$ ganzen Elemente von $K[x_1,\ldots,x_n]$ einen Unterring von $K[x_1,\ldots,x_n]$ bildet [$\to$Z2.1.10] ist $K[x_1,\ldots,x_n] = K[x_1,y_2,\ldots,y_n]$ ganz über $K[y_2,\ldots,y_n]$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $K[y_2,\ldots,y_n]$ ganz über einem Polynomring über K und somit auch $K[x_1,\ldots,x_n]$ wegen der Transitivität der Ganzheit [$\to$Z2.1.9]. $\square$

Satz 4.2.16. *Sei A eine affine K-Algebra. Dann* $\dim A = \operatorname{trdeg} A < \infty$.

Beweis. Ist $A = \{0\}$, so $\dim A = -1 = \operatorname{trdeg} A$. Sei also $A \neq \{0\}$. Nach 4.1.25 gilt $\operatorname{trdeg} A < \infty$. Nach 4.2.15 ist A ganz über $K[X_1,\ldots,X_n]$ für K-algebraisch unabhängige $X_1,\ldots,X_n \in A$. Nach 4.2.14 gilt $\dim A = \dim K[\underline{X}]$ und nach 4.1.29 $\operatorname{trdeg} A = \operatorname{trdeg} K[\underline{X}] \overset{4.1.24}{=} n$. Es reicht also $\dim K[\underline{X}] = n$ zu zeigen. Nach 4.2.4 gilt $\dim K[\underline{X}] \leq n$. Andererseits sind $(0) \subset (X_1) \subset \ldots \subset (X_1,\ldots,X_n)$ Primideale in $K[\underline{X}]$, also $\dim K[\underline{X}] \geq n$. $\square$

Bemerkung 4.2.17. Aus dem Noetherschen Normalisierungssatz 4.2.15 folgt sofort das Zariski-Lemma 1.3.5 (und damit der Hilbertsche Nullstellensatz 1.3.7): Sei nämlich A eine affine K-Algebra, die ein Körper ist, Œ $K \subseteq A$. Dann ist A ganz über einem Polynomring $K[X_1,\ldots,X_n]$ in $X_1,\ldots,X_n \in A$. Ist $n = 0$, so ist A ganz über K woraus man leicht sieht dass A ein endlichdimensionaler K-Vektorraum ist (benutze, dass A endlich erzeugt ist). Wäre aber $n \geq 1$, so wäre $\frac{1}{X_1}$ ganz über $K[X_1,\ldots,X_n]$, was man sofort widerlegt.

Definition 4.2.18. [$\to$4.2.1] Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine K-Varietät. Dann bezeichnet man

$$\dim V := \sup\{\ell \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es gibt irreduzible } K\text{-Varietäten } V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_\ell \subseteq V\} \in \{-1\} \cup \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

als die *Dimension* von V.

Bemerkung 4.2.19. Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine K-Varietät.

(a) Nach 1.4.22 gilt

$$\begin{aligned}\dim V &= \sup\{\ell \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es gibt Primideale } \mathfrak{p}_0,\ldots,\mathfrak{p}_\ell \text{ von } K[\underline{X}] \text{ mit } \mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{p}_\ell \supseteq I(V)\} \\ &= \dim(K[\underline{X}]/I(V)) \overset{4.2.16}{=} \operatorname{trdeg}(K[\underline{X}]/I(V)) \\ &\overset{4.1.25}{=} \sup\{\ell \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es gibt } i_1,\ldots,i_\ell \in \{1,\ldots,n\} \text{ mit } \overline{X_{i_1}},\ldots,\overline{X_{i_\ell}} \text{ } K\text{-algebraisch unabhängig in } K[\underline{X}]/I(V)\} \\ &\leq n < \infty.\end{aligned}$$

(b) $\dim V = -1 \iff K[\underline{X}]/I(V) = \{0\} \iff V = \emptyset$