Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2015/2016

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 5 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. (4P) (Ein Rechenbeispiel für Irreduzibilität von Varietäten)

Sei $K = \mathbb{C}$. Zeige, dass $V(X^2 - Y^2) \subseteq \mathbb{C}^2$ nicht irreduzibel ist. Zeige, dass $V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{C}^3$ irreduzibel ist.

Hinweis: Verwende das Kriterium von Eisenstein.

Aufgabe 2. (4P) (Maximale Ideale und Varietäten)

Sei K ein Körper, C der algebraische Abschluss von K und M die Menge der maximalen Ideale von $K[X_1, ..., X_n]$. Zeige, dass $V(\mathfrak{m})$ für jedes $\mathfrak{m} \in M$ endlich ist. Beweise ferner

$$\bigcup_{\mathfrak{m} \in M} V(\mathfrak{m}) = C^n$$

und dass die obige Vereinigung disjunkt ist. Folgere, dass in einer affinen Algebra Radikalideale immer Schnitte von maximalen Idealen sind.

Aufgabe 3. (4P) (Parametrisch definierte Varietäten sind irreduzibel)

Seien $0 \leq r \leq n$ und $p_1, \ldots, p_r \in K[X_{r+1}, \ldots, X_n]$. Betrachte das Ideal

$$I := (X_1 - p_1, \ldots, X_r - p_r) \subseteq K[X_1, \ldots, X_n].$$

(a) Zeige $I \cap K[X_{r+1}, \ldots, X_n] = (0)$.

(b) Zeige, dass I ein Primideal ist.

(c) Zeige, dass $V(I)$ irreduzibel ist.

Aufgabe 4. (4P) (Trennen von Varietäten)

Sei K ein Körper, $V_1, ..., V_m$ affine K-Untervarietäten von $\mathbb{A}^n$ und $k_1, ..., k_m \in K$ paarweise verschieden. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Die V_i sind paarweise disjunkt.

(b) Es gibt $f \in K[X_1, ..., X_n]$ derart, dass $V_i \subseteq V(f - k_i)$ für alle $i \in \{1, ..., m\}$.

Hinweis: Benutze den Chinesischen Restsatz.

Abgabe bis Mittwoch, den 25. November 2015, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.