Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2015/2016

Tom-Lukas Kriel
Markus Schweighofer

Übungsblatt 3 zur Algorithmischen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 1. (4P) (Gleichungen in endlichen und unendlichen Körpern)

Seien $g_1, ..., g_m \in \mathbb{Z}[\underline{X}]$. Für jedes $p \in \mathbb{P}$ betrachten wir den Körper $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ und dessen algebraischen Abschluss $\overline{\mathbb{F}}_p$ und wir bezeichnen die Bilder von $g_1, \ldots, g_m$ unter dem Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}[\underline{X}] \to \mathbb{F}_p[\underline{X}]$, der $\underline{X}$ auf $\underline{X}$ abbildet, mit $g_1^{(p)}, \ldots, g_m^{(p)}$. Für unendlich viele Primzahlen p gelte $V_{\overline{\mathbb{F}}_p}(g_1^{(p)}, ..., g_m^{(p)}) \neq \emptyset$. Zeige $V_{\mathbb{C}}(g_1, ..., g_m) \neq \emptyset$.

Aufgabe 2. (2P) (Welchen algebraisch abgeschlossenen Oberkörper soll man für Varietäten betrachten?)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, K ein Körper und seien C und C' algebraisch abgeschlossene Oberkörper von K. Zeige, dass die Abbildung

$$\{V_C(I) \mid I \text{ Ideal von } K[\underline{X}]\} \to \{V_{C'}(I) \mid I \text{ Ideal von } K[\underline{X}]\},$$
$$V_C(I) \mapsto V_{C'}(I) \qquad (I \text{ Ideal von } K[\underline{X}])$$

eine wohldefinierte Bijektion ist, die mit beliebigen Schnitten, endlicher Vereinigung und Mengeninklusion verträglich ist.

Aufgabe 3. (6P) (Minimale Primideale in einem Ring)

Sei A ein kommutativer Ring. Ein *minimales Primideal* von A ist ein Primideal $\mathfrak{p}$ von A, derart, dass es kein echt in $\mathfrak{p}$ enthaltenes anderes Primideal von A mehr gibt. Zeige:

(a) Jedes Primideal von A enthält ein minimales Primideal von A.

(b) Jedes minimale Primideal $\mathfrak{p}$ von A besteht nur aus Nullteilern von A.

(c) Sei A nun reduziert. Dann ist die Vereinigung der minimalen Primideale gerade die Menge der Nullteiler von A.

Hinweis: Betrachte in (b) den lokalen Ring $A_{\mathfrak{p}}$ und sein Nilradikal $\sqrt{(0)}$.

Aufgabe 4. (4P) (Erzeuger von maximalen Idealen)

Sei K ein Körper und $\mathfrak{m} \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$ ein maximales Ideal. Zeige, dass es $f_i \in K[X_1, \ldots, X_i]$ derart gibt, dass $\mathfrak{m} = (f_1, \ldots, f_n)$ gilt.
(Hinweis: Führe Induktion nach n durch. Zeige, dass $\mathfrak{m}' := \mathfrak{m} \cap K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ wieder maximal ist. Fasse $L' := K[X_1, \ldots, X_{n-1}]/\mathfrak{m}'$ als Unterkörper von $L := K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{m}$ auf, und betrachte die Körpererweiterung $L|L'$.)

Abgabe bis Mittwoch, den 11. November 2015, 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.