Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2014/2015

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 10 zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1. Sei $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung und R ein Zwischenring, das heißt ein Unterring von L, der K enthält. Zeige, dass R ein Zwischenkörper von $L|K$ ist.

Aufgabe 2. Seien $p, q \in \mathbb{P}$ mit $p \neq q$. Zeige $\sqrt{q} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ und bestimme

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) : \mathbb{Q}].$$

Aufgabe 3. Für jede Teilmenge M der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\mathring{\imath} \cong \mathbb{R}^2$ sei

$$\begin{aligned} \mathrm{Ge}(M) &= \text{Menge der Geraden, die zwei verschiedene Punkte von } M \text{ enthalten} \\ \mathrm{Kr}(M) &= \text{Menge der Kreise, deren Mittelpunkt in } M \text{ liegt und deren} \\ &\ \text{Radius gleich dem Abstand zweier Punkte aus } M \text{ ist.} \end{aligned}$$

Wir betrachten dann die folgenden *elementaren Konstruktionsschritte*:

($\times$) Schnitt zweier verschiedener Geraden aus $\mathrm{Ge}(M)$

($\varnothing$) Schnitt einer Geraden aus $\mathrm{Ge}(M)$ mit einem Kreis aus $\mathrm{Kr}(M)$

(⚭) Schnitt zweier verschiedener Kreise aus $\mathrm{Kr}(M)$.

Für jede Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ sei $M' \subseteq \mathbb{C}$ die Menge M vereinigt mit den Schnittpunkten, die man durch Anwendung von ($\times$), ($\varnothing$) und (⚭) erhalten kann. Man nennt die Elemente von M' die in einem Schritt aus M konstruierbaren Punkte. Nun definieren wir für $M \subseteq \mathbb{C}$ induktiv die Menge $M^{(n)}$ der in n Schritten ($n \in \mathbb{N}_0$) aus M konstruierbaren Punkte durch $M^{(0)} := M$ und $M^{(n+1)} := (M^{(n)})'$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Schließlich sagen wir, die Punkte aus

$$\measuredangle M := \bigcup \{M^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

sind *mit Zirkel und Lineal aus M konstruierbar*. Zeige durch geometrische Konstruktionen (stichpunktartig kommentierte Skizzen), dass für jedes $M \subseteq \mathbb{C}$ mit $\{0, 1\} \subseteq M$, die Menge $\measuredangle M$ einen Zwischenkörper von $\mathbb{C}|\mathbb{Q}(\mathring{\imath})$ bildet.

Abgabe bis Montag, den 19. Januar, um 9:55 Uhr in die Zettelkästen neben F411.