Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2014/2015

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Einführung in die Algebra, Übungsblatt 8, Lösungsvorschlag

Aufgabe 1. Sei A ein kommutativer noetherscher Ring. Zeige:

(a) Ist $I \subseteq A$ ein Ideal, so ist A/I noethersch.

(b) Ist $S \subseteq A$ multiplikativ, so ist A_S noethersch.

Lösungsvorschlag. (a) Sei I ein Ideal von A und bezeichne $\varphi \colon A \to A/I$ den kanonischen Epimorphismus. Sei nun J ein Ideal von A/I. Zu zeigen ist, dass J endlich erzeugt ist. Da $\varphi^{-1}(J)$ ein Ideal von A ist und A noethersch ist, ist dieses endlich erzeugt, d.h. es existieren $a_1, \ldots, a_n \in A$ mit $\varphi^{-1}(J) = (a_1, \ldots, a_n)_A$. Dann ist

$$J \overset{(1)}{=} \varphi(\varphi^{-1}(J)) = \varphi((a_1, \ldots, a_n)_A) \overset{(2)}{\subseteq} (\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))_{A/I} \subseteq J$$

wobei (1) gilt, da φ surjektiv ist. Es ist also $J = (\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))_{A/I}$ endlich erzeugt. (Beachte, dass aufgrund der Surjektivität natürlich auch in (2) Gleichheit gilt, Bilder von Idealen im Allgemeinen aber keine Ideale sind und deshalb hier nur eine Inklusion herrschte, wäre φ nicht surjektiv.)

(b) Indem wir A durch den nach (a) ebenfalls noetherschen kommutativen Ring A/I_S austauschen, reicht es nach 2.3.17 folgendes zu zeigen: Ist $S \subseteq A$ multiplikativ ohne Nullteiler, so ist $S^{-1}A$ noethersch. Sei also $S \subseteq A$ multiplikativ ohne Nullteiler und I ein Ideal von $S^{-1}A$. Dann ist $J := I \cap A$ ein Ideal von A. Da A noethersch ist, gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$ mit $J = (a_1, \ldots, a_n)_A$. Wir behaupten $I = (a_1, \ldots, a_n)_{S^{-1}A}$. Hier ist „$\supseteq$“ trivial, da $a_1, \ldots, a_m \in J \subseteq I$. Um “$\subseteq$” zu zeigen, sei $x \in I$. Wähle $a \in A$ und $s \in S$ mit $x = \frac{a}{s}$. Um $x \in (a_1, \ldots, a_n)_{S^{-1}A}$ zu zeigen, reicht es $a \in (a_1, \ldots, a_n)_{S^{-1}A}$ zu zeigen. Wir zeigen sogar $a \in (a_1, \ldots, a_n)_A$, was wegen $a \in A$ gleichbedeutend mit $a \in I$ ist. Da I ein Ideal in $S^{-1}A$ ist, gilt $a = s\frac{a}{s} \in I$ wie gewünscht.

Aufgabe 3. Gebe die Primfaktorzerlegung folgender Polynome in $\mathbb{Z}[X]$ an:

(a) $X^3 + 5X^2 + X + 9$

(b) $X^4 + 3X^3 - X^2 - 6X - 2$

(c) $3X^5 + 12X^3 - 36X^2 + 18$

Lösungsvorschlag. (a) Wir wenden auf $f := X^3 + 5X^2 + X + 9 \in \mathbb{Z}[X]$ das Reduktionskriterium 2.6.1 mit der Primzahl 5 an. Man prüft sofort nach, dass das Polynom $\overline{f} := X^3 + X - 1 \in \mathbb{F}_5[X]$ keine Nullstelle in $\mathbb{F}_5$ hat:

$$p(0) = 0,\ p(1) = 1,\ p(2) = -1,\ p(3) = p(-2) = -1,\ p(4) = 2.$$

Da f normiert ist, ist f primitiv in $\mathbb{Z}[X]$. Nach dem Reduktionskriterium ist f also irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$. Da $\mathbb{Z}[X]$ ein Integritätsring ist, ist f damit auch prim in $\mathbb{Z}[X]$. Die Primfaktorzerlegung von f in $\mathbb{Z}[X]$ lautet also $f = f = 1f^1$.

(b) Wir reduzieren $f = X^4 + 3X^3 - X^2 - 6X - 2$ modulo (3) und bekommen $\overline{f} = X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 \in \mathbb{F}_3[X]$. In $\mathbb{F}_3[X]$ ist $X^2 + 1$ offensichtlich irreduzibel, da es Grad 2 hat und in $\mathbb{F}_3$ keine Nullstelle hat. Für eine mögliche Zerlegung von $f = gh$ mit $g, h \in \mathbb{Z}[X]$ normiert und nicht konstant müsste also $\overline{g} = \overline{h} = X^2 + 1$ gelten, da $\mathbb{F}_3[X]$ faktoriell ist. Mit diesem Wissen lässt sich auch tatsächlich leicht eine solche Zerlegung erraten, nämlich $g := X^2 - 2$ und $h := X^2 + 3X + 1$. Sowohl g als auch h sind wieder nach dem Reduktionskriterium angewandt mit der Primzahl 3 irreduzibel. Die Primfaktorzerlegung von f in $\mathbb{Z}[X]$ lautet also $f = gh = 1g^1h^1$.

(c) Es ist $3X^5 + 12X^3 - 36X^2 + 18 = 3(X^5 + 4X^3 - 12X^2 + 6)$ die Primfaktorzerlegung, da das Polynom in Klammern irreduzibel ist nach dem Kriterium von Eisenstein angewandt auf die Primzahl 2.