
Übungsblatt 8 zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1. Sei A ein kommutativer noetherscher Ring. Zeige:

- (a) Ist $I \subseteq A$ ein Ideal, so ist A/I noethersch.
- (b) Ist $S \subseteq A$ multiplikativ, so ist A_S noethersch.

Aufgabe 2. Betrachte den Unterring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \mathbb{Z}[\sqrt{5}i] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ von \mathbb{C} . Zu $x = a + b\sqrt{-5}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) sei $x^* := a - b\sqrt{-5}$ und $N(x) := x^*x \in \mathbb{Z}$. Zeige:

- (a) $x \mapsto x^*$ ist ein selbstinverser Automorphismus des Ringes $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
- (b) $N(xy) = N(x)N(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
- (c) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^\times = \{-1, 1\}$
- (d) 2 und $1 + \sqrt{-5}$ sind in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ irreduzibel.
- (e) 2 und $1 + \sqrt{-5}$ sind in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nicht prim.
- (f) $(2, 1 + \sqrt{-5})$ ist in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ kein Hauptideal.
- (g) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist nicht faktoriell.
- (h) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist noethersch.

Aufgabe 3. Gebe die Primfaktorzerlegung folgender Polynome in $\mathbb{Z}[X]$ an:

- (a) $X^3 + 5X^2 + X + 9$
- (b) $X^4 + 3X^3 - X^2 - 6X - 2$
- (c) $3X^5 + 12X^3 - 36X^2 + 18$

Abgabe bis Montag, den 15. Dezember, um 9:55 Uhr in die Zettelkästen neben F411.