Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2014/2015

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 7 zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1. Sei R ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper K und sei $\mathbb{P}_R$ wie in der Vorlesung ein Vertretersystem der Primelemente ungleich 0 modulo Assoziiertheit.

(a) Zeige, dass $\Phi\colon R^\times \times \mathbb{Z}^{(\mathbb{P}_R)} \to K^\times : (c, \alpha) \mapsto c\mathbb{P}_R^\alpha$ ein Gruppenisomorphismus ist.

(b) Zu $a \in K^\times$ sei $\Phi^{-1}(a) = (c_a, \alpha_a)$. Zeige, dass für $p \in \mathbb{P}_R$ die Abbildung

$$\begin{aligned} v_p\colon K &\to \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ a &\mapsto \begin{cases} \alpha_a(p), & \text{falls } a \neq 0 \\ \infty, & \text{falls } a = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

eine diskrete Bewertung auf K ist, genannt *p-Bewertung* oder *p-adische Bewertung*.

(c) Verwende (b) um zu zeigen, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und v eine diskrete Bewertung auf K und $\mathscr{O}_v$ der zugehörige Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_v$.

(a) Seien $f, g \in \mathscr{O}_v[X]$ mit jeweils mindestens einem Koeffizienten in $\mathscr{O}_v^\times$. Zeige dass dann mindestens ein Koeffizient von fg in $\mathscr{O}_v^\times$ liegt.

Hinweis: Betrachte den Homomorphismus $\Psi\colon \mathscr{O}_v[X] \to (\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v)[X]$, wobei $\Psi|_{\mathscr{O}_v}$ die Restklassenabbildung sei und $\Psi(X) = X$ (vgl. 2.2.7) und verwende 2.2.13.

(b) Zeige, dass für $f, g \in K[X]$ und

$$\begin{aligned} u\colon K[X] &\to \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ \sum_{i=0}^{d} a_i X^i &\mapsto \min\{\, v(a_i) \mid i \in \{0, \dots, d\}\,\} \qquad (d \in \mathbb{N}_0,\ a_0, \dots, a_d \in K) \end{aligned}$$

gilt $u(fg) = u(f) + u(g)$ und $u(f + g) \geq \min\{u(f), u(g)\}$.

(c) Zeige, dass es genau eine diskrete Bewertung w auf $K(X)$ gibt mit $w(f) = u(f)$ für alle $f \in K[X]$.

(d) Zeige, dass $w|_K = v$. Man nennt w die (*klassische*) *Gauß-Fortsetzung* von v.

Aufgabe 3. Sei $p \in \mathbb{P}$ und betrachte das *p-te Kreisteilungspolynom*

$$\Phi_p := X^{p-1} + \cdots + 1 \in \mathbb{Z}[X].$$

(a) Berechne den Wert des Binomialkoeffizienten $\binom{p}{k}$ für $k \in \{1, \ldots, p-1\}$ unter der p-adischen Bewertung von $\mathbb{Q}$.

(b) Zeige $\Phi_p = \frac{X^p - 1}{X - 1}$ in $\mathbb{Q}(X)$.

(c) Zeige, dass es einen Ringautomorphismus Ψ von $\mathbb{Q}[X]$ gibt, mit $\Psi(X) = X + 1$ und $\Psi(\mathbb{Z}[X]) = \mathbb{Z}[X]$.

(d) Zeige, dass man den Ringhomomorphismus aus (c) zu einem Körperautomorphismus von $\mathbb{Q}(X)$ fortsetzen kann.

(e) Zeige, dass Φ_p irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$ ist.

  Hinweis: Wende das Eisenstein-Kriterium auf $\Psi(\Phi_p)$ an und benutze dazu alle vorherigen Teilaufgaben.

Abgabe bis Montag, den 8. Dezember, um 9:55 Uhr in die Zettelkästen neben F411.