Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2014/2015

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Einführung in die Algebra, Übungsblatt 3, Lösungsvorschlag

Aufgabe 2 (6+2 Punkte). Sei H eine Untergruppe der Gruppe G. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) $H \lhd G$

(b) ${}_H\!\sim\; = \;\sim_H$

(c) $\forall a \in G : Ha = aH$

(d) $\forall a \in G : aHa^{-1} := \{aha^{-1} \mid h \in H\} = H$

(e) $\forall a \in G : aHa^{-1} \subseteq H$

(f) ${}_H\!\sim$ ist eine Kongruenzrelation,

(g) $\sim_H$ ist eine Kongruenzrelation.

(h) H ist der Kern eines Gruppenhomomorphismus.

Lösungsvorschlag. (a) $\iff$ (b) folgt aus Definition 1.3.6.

(b) $\implies$ (c): Gilt ${}_H\!\sim\; = \;\sim_H$ so ist $Ha = \overset{{}_H\!\sim}{\tilde{a}} = \overset{\sim_H}{\tilde{a}} = aH$ für alle $a \in G$.

(c) $\implies$ (d): Ist $a \in G$ mit $aH = Ha$, so $aHa^{-1} = Haa^{-1} = H$.

(d) $\implies$ (e) ist trivial.

(e) $\implies$ (f): Gelte (e) und seinen $a, a', b, b' \in G$ mit $a \;{}_H\!\sim\; a'$ und $b \;{}_H\!\sim\; b'$. Zu zeigen ist $ab \;{}_H\!\sim\; a'b'$. Es sind $aa'^{-1}, bb'^{-1} \in H$. Zu zeigen ist $abb'^{-1}a'^{-1} \in H$. Wir haben

$$abb'^{-1}a'^{-1} = \underbrace{abb'^{-1}a^{-1}}_{\in H \text{ nach (e)}} \underbrace{aa'^{-1}}_{\in H} \in H.$$

(f) $\implies$ (b): Gelte (f). Unter Verwendung der Reflexivität von ${}_H\!\sim$ bekommen wir somit für $a, b \in G$ unmittelbar

$$a \;{}_H\!\sim\; b \overset{(f)}{\iff} 1 \;{}_H\!\sim\; a^{-1}b \iff a^{-1}b \in H \iff a \sim_H b.$$

Also ${}_H\!\sim\; = \;\sim_H$.

(f) $\implies$ (g) folgt sofort aus (f) $\implies$ (b).

(g) $\implies$ (h): Ist $\sim_H$ eine Kongruenzrelation, so ist nach 1.3.2 $G/{\sim_H}$ eine Gruppe und $G \to G/{\sim_H}$ ein Homomorphismus mit Kern

$$\{\, a \in G \mid \overset{\sim_H}{a} = 1 \,\} = \{\, a \in G \mid a \sim_H 1 \,\} = \{\, a \in G \mid a \in H \,\} = H$$

(h) $\implies$ (e): Sei $f : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus und $H = \ker f$. Nun gilt für alle $a \in G$ und $h \in H$

$$f(aha^{-1}) = f(a) \underbrace{f(h)}_{=1} f(a)^{-1} = f(a)f(a)^{-1} = 1.$$

Also $aha^{-1} \in H$. Damit sind alle Äquivalenzen gezeigt.