Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2014/2015

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Einführung in die Algebra, Übungsblatt 1, Lösungsvorschlag

Aufgabe 4. Eine (abelsche) *Suppe* $(G, \cdot)$ sei genauso definiert wie eine (abelsche) Gruppe mit dem einzigen Unterschied, dass das Axiom (A) durch das Axiom

$$(M) \qquad \forall a, b, c \in G : (ab)(ca) = a((bc)a)$$

ersetzt wird.

(a) Betrachte den dreielementigen Körper $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ und den vierdimensionalen Vektorraum $\mathbb{F}_3^4$. Zeige, dass $\mathbb{F}_3^4$ vermöge

$$xy := x + y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (x_3 - y_3)(x_1y_2 - x_2y_1) \end{pmatrix} \qquad (x, y \in \mathbb{F}_3^4)$$

eine abelsche Suppe wird.

(b) Ist jede Suppe eine Gruppe?

Lösungsvorschlag. (a) Der Übersicht halber und um Schreibarbeit zu sparen führen wir folgende Notationen ein:

- $v := e_4 \in \mathbb{F}_3^4$ der vierte Einheitsvektor
- $\alpha \colon \mathbb{F}_3^4 \to \mathbb{F}_3 : x \mapsto x_3$
- $\beta \colon \mathbb{F}_3^4 \times \mathbb{F}_3^4 \to \mathbb{F}_3 : (x, y) \mapsto x_1y_2 - x_2y_1$
- $\varphi \colon \mathbb{F}_3^4 \times \mathbb{F}_3^4 \to \mathbb{F}_3 : (x, y) \mapsto \alpha(x - y)\beta(x, y)$

Wir bekommen also $xy = x + y + \varphi(x, y)v$ für alle $x, y \in \mathbb{F}_3^4$. Wir halten außerdem folgende offensichtlichen Eigenschafen fest:

- α ist linear und damit $\varphi(x, y) = \alpha(x - y)\beta(x, y) = \alpha(\beta(x, y)(x - y))$.
- β ist bilinear und $\beta(x, x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{F}_3^4$, das heißt β ist *alternierend*. Insbesondere gilt $\beta(x, y) = -\beta(y, x)$ für alle $x, y \in \mathbb{F}_3^4$ (wie man durch Betrachtung von $\beta(x + y, x + y)$ leicht sieht).
- φ ist symmetrisch und für alle $a, b \in \mathbb{F}_3$ gilt $\varphi(x + av, y + bv) = \varphi(x, y)$.
- Wir verwenden außerdem, dass $2 := 1 + 1 = -1$ in $\mathbb{F}_3$ gilt.

Nun zum Beweis:

(K) Die Multiplikation auf G ist kommutativ, da $+$ und φ jeweils symmetrisch sind.

(N) $1 := 0 \in \mathbb{F}_3^4$ ist das (mit demselben Argument wie im Fall einer Gruppe eindeutig bestimmte) neutrale Element für die Multiplikation auf G, da für alle $x \in \mathbb{F}_3^4$ gilt

$$1x = x1 = 0x = x0 = x + 0 + \varphi(x, 0) = x + \alpha(x)\beta(x, 0) = x.$$

(I) Zu $x \in \mathbb{F}_3^4$ gibt es ein inverses Element x^{-1}, nämlich das Inverse $-x$ von x in der additiven Gruppe des Vektorraums $\mathbb{F}_3^4$ (also $x^{-1} = -x$), denn

$$(-x)x = x(-x) = x - x + \alpha(2x)\beta(-x, x) = 0 - \alpha(2x)\beta(x, x) = 0.$$

Nun bleibt noch zu zeigen, dass das Axiom (M), die sogenannte *Moufang-Identität* [Ruth Moufang *1905 †1977] gilt. Seien also $x, y, z \in \mathbb{F}_3^4$. Wir haben

$$\begin{aligned}(xy)(zx) &= (x + y + \varphi(x, y)v)(z + x + \varphi(z, x)v) \\ &= x + y + \varphi(x, y)v + z + x + \varphi(z, x)v + \varphi(x + y + \varphi(x, y)v, z + x + \varphi(z, x)v)v \\ &= 2x + y + z + (\varphi(x, y) + \varphi(x, z) + \varphi(x + y, x + z))v\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}x((yz)x) &= x((y + z + \varphi(y, z)v)x) \\ &= x((y + z + \varphi(y, z)v) + x + \varphi(y + z + \varphi(y, z)v, x)v) \\ &= x(y + z + \varphi(y, z)v + x + \varphi(y + z, x)v) \\ &= x(x + y + z + (\varphi(y, z) + \varphi(y + z, x))v) \\ &= x + (x + y + z + (\varphi(y, z) + \varphi(y + z, x))v) + \\ &\quad \varphi(x, x + y + z + (\varphi(y, z) + \varphi(y + z, x))v) \\ &= 2x + y + z + (\varphi(y, z) + \varphi(y + z, x))v + \varphi(x, x + y + z)v \\ &= 2x + y + z + (\varphi(y, z) + \varphi(y + z, x) + \varphi(x, x + y + z))v\end{aligned}$$

Es bleibt also noch

$$t_1 := \varphi(x, y) + \varphi(x, z) + \varphi(x + y, x + z) = \varphi(y, z) + \varphi(y + z, x) + \varphi(x, x + y + z) =: t_2$$

zu zeigen. Wegen der Linearität von α und (K) gilt $t_i = \alpha(s_i)$ für $i \in \{1, 2\}$ mit

$$\begin{aligned}s_1 &:= \beta(x, y)(x - y) + \beta(x, z)(x - z) + \beta(x + y, x + z)(y - z) \\ &= (\beta(x, y) + \beta(x, z))x + \\ &\quad (-\beta(x, y) + \beta(x, x) + \beta(x, z) + \beta(y, x) + \beta(y, z))y + \\ &\quad\quad (-\beta(x, z) - \beta(x, x) - \beta(x, z) - \beta(y, x) - \beta(y, z))z \\ &= (\beta(x, y) + \beta(x, z))x + \\ &\quad (\beta(x, y) + \beta(x, z) + \beta(y, z))y + \\ &\quad\quad (\beta(x, z) + \beta(x, y) - \beta(y, z))z\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
s_2 &:= \beta(y,z)(y-z) + \beta(y+z,x)(y+z-x) + \beta(x,x+y+z)(-y-z) \\
&= (-\beta(y,x) - \beta(z,x))x + \\
&\quad (\beta(y,z) + \beta(y,x) + \beta(z,x) - \beta(x,x) - \beta(x,y) - \beta(x,z))y + \\
&\quad\quad (-\beta(y,z) + \beta(y,x) + \beta(z,x) - \beta(x,x) - \beta(x,y) - \beta(x,z))z \\
&= (\beta(x,y) + \beta(x,z))x + \\
&\quad (\beta(y,z) + \beta(x,y) + \beta(x,z))y + \\
&\quad\quad (-\beta(y,z) + \beta(x,y) + \beta(x,z))z
\end{aligned}$$

Man sieht also, dass $s_1 = s_2$ und damit $t_1 = \alpha(s_1) = \alpha(s_2) = t_2$.

(b) Nicht jede Suppe ist eine Gruppe, denn für die Suppe aus (a) und die Standardvektoren $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{F}_3^4$ gilt

$$\begin{aligned}
(e_1e_2)e_3 &= (e_1 + e_2 + \varphi(e_1,e_2)v)e_3 \\
&= e_1 + e_2 + e_3 + \varphi(e_1 + e_2, e_3)v \\
&= e_1 + e_2 + e_3
\end{aligned}$$

aber

$$\begin{aligned}
e_1(e_2e_3) &= e_1(e_2 + e_3 + \varphi(e_2,e_3)v) \\
&= e_1 + e_2 + e_3 + \varphi(e_1, e_2 + e_3)v \\
&= e_1 + e_2 + e_3 + (-1)(1-0)v \\
&= e_1 + e_2 + e_3 - e_4
\end{aligned}$$

wodurch die Assoziativität verletzt ist.