Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2014/2015

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 1 zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1. Seien G und H Gruppen, in denen folgendes gilt:

$$\forall a \in G : a^2 = 1$$
$$\exists a \in H : \forall b \in H : \exists k \in \mathbb{Z} : b = a^k$$

Ist G abelsch? Ist H abelsch? Gebe jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel!

Aufgabe 2. Für welche Körper K und welche $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathrm{GL}_n(K)$ abelsch?

Aufgabe 3. Bezeichne $\mathbb{C}$ den Körper der komplexen Zahlen, $\mathring{\imath} \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren komplexen 2×2-Matrizen und $1 = I_2$ das neutrale Element dieser Gruppe. Setze weiter

$$i := \begin{pmatrix} \mathring{\imath} & 0 \\ 0 & -\mathring{\imath} \end{pmatrix}, \quad j := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad k := \begin{pmatrix} 0 & \mathring{\imath} \\ \mathring{\imath} & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

(b) Zeige, dass die achtelementige Menge

$$Q_8 := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ bildet.

Man nennt Q_8 die *Quaternionengruppe*.

Aufgabe 4. Eine (abelsche) *Suppe* $(G, \cdot)$ sei genauso definiert wie eine (abelsche) Gruppe mit dem einzigen Unterschied, dass das Axiom (A) durch das Axiom

$$(M) \qquad \forall a, b, c \in G : (ab)(ca) = a((bc)a)$$

ersetzt wird.

(a) Betrachte den dreielementigen Körper $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ und den vierdimensionalen Vektorraum $\mathbb{F}_3^4$. Zeige, dass $\mathbb{F}_3^4$ vermöge

$$xy := x + y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (x_3 - y_3)(x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{pmatrix} \qquad (x, y \in \mathbb{F}_3^4)$$

eine abelsche Suppe wird.

(b) Ist jede Suppe eine Gruppe?

Abgabe bis Montag, den 27. Oktober, um 09:55 Uhr in die Zettelkästen neben F411 .