Universität Konstanz Sebastian Gruler
Fachbereich Mathematik und Statistik María López Quijorna
Sommersemester 2013 Markus Schweighofer

Übungsblatt 17 zur Reellen Algebraischen Geometrie

Aufgabe 58. Sei R ein reell abgeschlossener Körper, $n \in \mathbb{N}_0$, $B := \{x \in R^n \mid \|x\| < 1\}$ und $S := \{x \in R^n \mid \|x\| = 1\}$. Zeige, dass die Abbildungen

$$\varphi\colon R^n \to B,\ x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+\|x\|^2}} \qquad \text{und}$$
$$\psi\colon B \to R^n,\ y \mapsto \frac{y}{\sqrt{1-\|y\|^2}}$$

$\mathbb{Q}$-semialgebraisch, stetig und invers zueinander sind. Zeige ferner, dass eine semialgebraische Teilmenge A von R^n genau dann abgeschlossen ist, wenn $\varphi(A) \cup S$ semialgebraisch kompakt ist.

Aufgabe 59. Sei K ein Unterkörper von $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ K-semialgebraisch. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \operatorname{dist}(x, S) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in S\}$$

stetig und K-semialgebraisch ist.

Aufgabe 60. Sei S eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ mit

$$\Gamma_{\exp} = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq S.$$

Zeige, dass es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le c,\ 0 \le y \le e^x\} \subseteq S.$$

Aufgabe 61. Sei R ein reell abgeschlossener Körper und $f\colon R \to R$ semialgebraisch. Zeige, dass es dann eine endliche Menge $S \subseteq R$ gibt derart, dass die Einschränkung von f auf $R \setminus S$ stetig ist.

Hinweis: Überlege, warum es zu zeigen reicht, dass jede nichtleere offene Menge $A \subseteq R$ einen Punkt x enthält, an dem f stetig ist (in dem üblichen Sinne, dass das Urbild einer jeden Umgebung von $f(x)$ eine Umgebung von x ist). Argumentiere, warum es reicht, dies für den Fall $R = \mathbb{R}$ zu zeigen. Behandle zunächst den einfachen Fall, dass es eine nichtleere offene Menge $B \subseteq A$ mit $\#f(B) < \infty$ gibt. Im anderen Fall finde einen geeigneten Punkt x durch eine Intervallschachtelung.

Abgabe bis Dienstag, den 21. Mai, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.