Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2013/2014

Merlin Carl
Markus Schweighofer

Übungsblatt 12 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1:

(a) Sei K ein Körper. Zeige

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

für alle $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2 \in K$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \{-1, 1\}^{n\times n} \subseteq \mathbb{Z}^{n\times n}$. Zeige, dass die Determinante von A eine ganze Zahl ist, die von 2^{n-1} geteilt wird.

Aufgabe 2: Zeige, dass es zu jedem $x \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ ein $p \in \mathbb{Q}[X]$ mit $p \neq 0$ und $p(x) = 0$ gibt.

Aufgabe 3: Sei K ein endlicher Körper mit k Elementen und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Wie viele invertierbare $n \times n$-Matrizen gibt es über K?

(b) Wie viele $n \times n$-Matrizen gibt es über K, die mit jeder anderen $n \times n$-Matrix über K multiplikativ kommutieren?

(c) Für wie viele $n \times n$-Matrizen $A \in K^{n\times n}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $A^m = I_n$?

Aufgabe 4: Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $T_1, ..., T_{n+1} \subseteq \{1, ..., n\}$. Zeige: Es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n+1\}$ mit $T_{i_1} \Delta \dots \Delta T_{i_k} = \emptyset$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$. Zeige

$$\prod_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \frac{x_j - x_i}{j - i} \in \mathbb{Z}.$$

Hinweis: Œ seien $x_1, \dots, x_n$ paarweise verschieden. Verwende Induktion nach n. Bestimme im Induktionsschritt von $n-1$ nach n ($n \in \mathbb{N}$) das Polynom

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & (x_1(x_1-1)) & \dots & (x_1(x_1-1)\cdots(x_1-n+2)) \\ 1 & x_2 & (x_2(x_2-1)) & \dots & (x_2(x_2-1)\cdots(x_2-n+2)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & T & (T(T-1)) & \dots & (T(T-1)\cdots(T-n+2)) \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}[T],$$

indem Du zunächst seinen Grad, dann seine Nullstellen und dann mit der Induktionsvoraussetzung seinen Leitkoeffizienten bestimmst. Zeige, dass die *Binomialkoeffizienten* $\binom{x}{j} = \prod_{k=1}^{j} \frac{x-k+1}{k}$ für alle $x \in \mathbb{Z}$ und $j \in \mathbb{N}_0$ ganze Zahlen sind und betrachte die Matrix

$$\begin{pmatrix} \binom{x_1}{0} & \binom{x_1}{1} & \dots & \binom{x_1}{n-1} \\ \binom{x_2}{0} & \binom{x_2}{1} & \dots & \binom{x_2}{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{x_n}{0} & \binom{x_n}{1} & \dots & \binom{x_n}{n-1} \end{pmatrix}.$$

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Dienstag, den 28. Januar 2014, um 9:55 Uhr in das Postfach Deines Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.