Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2013/2014

Merlin Carl
Markus Schweighofer

Übungsblatt 8 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: (15 Punkte) Sei $K \in \{\mathbb{C}, \mathbb{F}_9, \mathbb{F}_{49}\}$ mit $2 := 1+1 \in K$, $3 := 1+1+1 \in K$ und so weiter. Betrachte die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & -2-i \\ 2 & 1-i & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & -1+i \\ i & 0 & 0 & -i & 1 & 0 & -1 & 2i \end{pmatrix} \in K^{3\times 8}.$$

(a) Berechne eine Matrix $B \in K^{3\times 8}$ in reduzierter Stufenform mit $A \sim B$ durch Anwendung von Zeilenoperationen (dabei sind sämtliche durchgeführten Zeilenoperationen wie in den Beispielen aus der Vorlesung anzuzeigen).

(b) Bestimme die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$(*) \qquad Ax = 0 \qquad (x \in K^8).$$

Hinweis: Wenn folgendes nicht gilt, dann ist Deine Rechnung in (a) fehlerhaft:

$$B\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2}+\frac{3i}{2} \\ \frac{15}{2}-\frac{3i}{2} \end{pmatrix} & \text{falls } K = \mathbb{C} \\ \begin{pmatrix} 5+3i \\ 6+3i \\ 0 \end{pmatrix} & \text{falls } K = \mathbb{F}_9 \\ \begin{pmatrix} 9+7i \\ 12+12i \\ 11+16i \end{pmatrix} & \text{falls } K = \mathbb{F}_{49} \end{cases}$$

Aufgabe 2: (10 Punkte) Wieviele Automorphismen besitzt $\mathbb{Q}$ als Menge, als abelsche Gruppe und als kommutativer Ring?

Zusatzaufgabe für Interessierte: (10 Punkte)

(a) Sei $n \in \mathbb{N}_{>2}$. Zeige: Es existiert ein $a \in \mathbb{Z}/(n)$, das keine Quadratwurzel in $\mathbb{Z}/(n)$ besitzt, d.h. für das kein $b \in \mathbb{Z}/(n)$ existiert mit $a = b^2$.

(b) Sei nun $p > 2$ eine Primzahl und es besitze $a \in \mathbb{F}_p$ keine Quadratwurzel in $\mathbb{F}_p$. Zeige: $\mathbb{F}_p[X]/(X^2 - a)$ ist ein Körper mit genau p^2 vielen Elementen.

Abgabe bis Dienstag, den 17. Dezember 2013, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihres Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.