
Übungsblatt 7 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: Entscheide jeweils, ob es sich (zusammen mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation) um Körper handelt.

- (a) $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
- (b) $\{a + \frac{1}{2}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$
- (c) $\{a + \frac{1}{n}b \mid a, b \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
- (d) $\{\sum_{i=1}^n q_i \sqrt{i} \mid n \in \mathbb{N}, q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}\}$

Aufgabe 2: Es sei $K := \mathbb{Q}[X]/(X^2 + 1)$.

(a) Zeige

$$\mathbb{1}^{-(X^2+1)} = \left\{ \sum_{k=0}^m a_k X^k + \sum_{k=0}^m b_k X^{k+1} \mid m \in \mathbb{N}_0, a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_m \in \mathbb{Q}, \right. \\ \left. a_0 + \dots + a_m = 1, b_0 + \dots + b_m = 0 \right\}.$$

- (b) Zeige: K ist ein Körper mit einer imaginären Einheit.
- (c) Ist K isomorph zu \mathbb{C} ?

Aufgabe 3: Zu $c \in \mathbb{R}$ betrachte $K_c := \mathbb{R}[X]/(X^2 + c)$. Beantworte folgende Fragen (mit Beweis): Für welche c ist K_c ein Körper? Für welche c ist K_c isomorph zu \mathbb{R} ? Für welche c ist K_c isomorph zu \mathbb{C} ?

Zusatzaufgabe für Interessierte:

- (a) Zeige: Für alle natürlichen Zahlen m und n ist $\text{ggT}(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^{\text{ggT}(m,n)} - 1$.
- (b) Die Fibonaccifolge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist definiert durch $F_0 := 0, F_1 := 1, F_{n+2} := F_n + F_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeige: Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\text{ggT}(F_m, F_n) = F_{\text{ggT}(m,n)}$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Dienstag, den 10. Dezember 2013, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihres Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.