Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2013/2014

Merlin Carl
Markus Schweighofer

Übungsblatt 6 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: Sei A ein kommutativer Ring. Ist $p \in A[X]$ ein Polynom, so nennen wir $A \to A,\ x \mapsto p(x)$ die durch p definierte *Polynomfunktion*. Wir nennen eine Selbstabbildung von A eine *Polynomfunktion*, wenn sie (auf diese Weise) durch ein Polynom aus $A[X]$ definiert wird. Bestimme die Anzahl der Selbstabbildungen von $\mathbb{Z}/(6)$, die Polynomfunktionen sind (selbstverständlich mit Begründung).

Aufgabe 2: Handelt es sich um eine wohldefinierte Abbildung?

(a) $\mathbb{N}/{\sim} \times \mathbb{N}/{\sim} \to \mathbb{N}/{\sim},\ (\widetilde{a}, \widetilde{b}) \mapsto \widetilde{a+b}$, wobei $a \sim b$ für $a, b \in \mathbb{N}$ genau dann gelte, wenn die jeweils vorletzten Ziffern in den Dezimaldarstellungen von a und b übereinstimmen (die vorletzte Ziffer einer einstelligen Zahl sei dabei 0)

(b) $\mathbb{N}/{\sim} \times \mathbb{N}/{\sim} \to \mathbb{N}/{\sim},\ (\widetilde{a}, \widetilde{b}) \mapsto \widetilde{a+b}$, wobei $a \sim b$ für $a, b \in \mathbb{N}$ genau dann gelte, wenn die Endziffern in den Dezimaldarstellungen von a und b übereinstimmen

(c) $\{f \mid f \text{ Polynomfunktion von } \mathbb{R} \text{ nach } \mathbb{R}, f \text{ nicht konstant null auf } \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$,
$f \mapsto$ Leitkoeffizient eines f definierenden Polynoms aus $\mathbb{R}[X]$

(d) $\{f \mid f \text{ Polynomfunktion von } \mathbb{Z}/(6) \text{ nach } \mathbb{Z}/(6)\} \to \mathbb{Z}/(6)$,
$f \mapsto$ Leitkoeffizient eines f definierenden Polynoms aus $(\mathbb{Z}/(6))[X]$

Aufgabe 3: Zu einer natürlichen Zahl $\sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$ ($n \in \mathbb{N}_0,\ a_0, \ldots, a_n \in \{0, \ldots, 9\}$) nennt man $\sum_{k=0}^{n} a_k$ ihre *Quersumme* und $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ ihre *alternierende Quersumme*.

(a) Zeige, dass die Differenz einer natürlichen Zahl und ihrer Quersumme durch 9 teilbar ist.

(b) Zeige, dass die Differenz einer natürlichen Zahl und ihrer alternierenden Quersumme durch 11 teilbar ist.

(c) Bestimme die Quersumme der Quersumme der Quersumme der Quersumme von $10^{62957} - 1$.

Aufgabe 4: Wir betrachten den kommutativen Ring $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}$ mit der punktweisen Addition und der Faltung $*$ als Multiplikation.

(a) Bestimme $a \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}$ mit $a * (1, 1, 1, ...) = 1$.

(b) Es sei $a \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}$ definiert durch $a(0) := a(1) := 1$ und $a(n+2) := a(n) + a(n+1)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Bestimme $b \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}$ mit $a * b = 1$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Zeige, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $k \in \mathbb{N}$ gibt so, dass $\{k, \dots, k+n\}$ keine Primzahl enthält.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Dienstag, den 03. Dezember 2013, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihres Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.