
Übungsblatt 2 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1:

- (a) Betrachte die Funktionen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \quad \text{und} \quad g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}.$$

Bestimme Definitions- und Zielmenge sowie die Funktionsvorschrift für $f \circ g$ und $g \circ f$.

- (b) Es sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Betrachte die Selbstabbildungen f und g von $\{0, \dots, n\}$, die gegeben sind durch $f(i) = i + 1$ für $i \in \{0, \dots, n - 1\}$, $f(n) = 0$ und $g(i) = n - i$ für $i \in \{0, \dots, n\}$. Zeige, dass f und g Permutationen sind und bestimme $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f^{-1})(n)$ und $(f^{-1} \circ g^{-1})(0)$.

- (c) Betrachte die Abbildung

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, i \mapsto (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, j \mapsto 2ij).$$

Bestimme $(g(3))(2)$ sowie $(g((g(2))(1)))(3)$. Ist g injektiv/surjektiv/bijektiv?

Aufgabe 2: Begründe jeweils alle Antworten zu folgenden Fragen:

- (a) Betrachte $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto [x]$, wobei $[x]$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ die größte ganze Zahl z mit $z \leq x$ bezeichnet. Betrachte nun $h: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$, $g \mapsto f \circ g$. Ist h injektiv? Ist h surjektiv? Wie viele $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ gibt es mit $h(g) = f$?

- (b) Es bezeichne A die Menge aller bijektiven Funktionen von \mathbb{R} nach $\mathbb{R}^{>0}$ und B die Menge aller bijektiven Funktionen von $\mathbb{R}^{>0}$ nach \mathbb{R} . Entscheide, ob

$$A \rightarrow B, f \mapsto f^{-1}$$

injektiv/surjektiv/bijektiv ist.

- (c) Setze $F := \{f \mid S \subseteq \mathbb{R}, f: S \rightarrow \mathbb{R}\}$. Definiere

$$r: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow F, (f, S) \mapsto f|_S.$$

Bestimme den Wertebereich von $r((\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3), \mathbb{R}_{>0})$.
Ist r injektiv/surjektiv/bijektiv?

Aufgabe 3:

(a) Es seien $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ und $h: C \rightarrow D$ Abbildungen. Zeige

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

(b) Gilt für beliebige Selbstabbildungen f und g einer Menge A stets $f \circ g = g \circ f$?

Aufgabe 4: Beantworte die folgenden Fragen. Begründe alle Antworten. Existiert eine surjektive Abbildung

(a) von \mathbb{N} nach \mathbb{Z} ?

(b) von \mathbb{N} nach $\prod_{i \in \{0,1\}} \mathbb{N}$?

(c) von \mathbb{N} nach $\prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, 1\}$?

Zusatzaufgabe für Interessierte: Existiert eine surjektive Abbildung

(a) von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ nach \mathbb{R} ?

(b) von \mathbb{R} nach $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

Begründe die Antworten.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen. Abgabe bis Dienstag, den 05. November 2013, um 9:55 Uhr in das Postfach Ihres Tutors in der 4. Etage des F-Gebäudes.