Universität Konstanz Sebastian Gruler
Fachbereich Mathematik und Statistik María López Quijorna
Sommersemester 2012 Markus Schweighofer

Klausur zur Polynomialen Optimierung

Aufgabe 1 (7 Punkte). In der Literatur wird semidefinite Optimierung oft wie folgt vorgestellt: Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$, $A_1, \dots, A_m, C \in S\mathbb{R}^{n \times n}$ und $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$. Das durch diese Daten gegebene Optimierungsproblem

$$(P_{\text{lit}}) \qquad \text{minimiere } \operatorname{tr}(CX) \text{ über } X \in \mathbb{R}^{n \times n}$$
$$\text{mit } X \succeq 0 \text{ und } \operatorname{tr}(A_i X) = b_i \text{ für } i \in \{1, \dots, m\}$$

nennt man dann ein SDP und

$$(D_{\text{lit}}) \qquad \text{maximiere } b^* y \text{ über } y \in \mathbb{R}^m \text{ mit } \sum_{i=1}^{m} y_i A_i \preceq C$$

sein Dual.

(a) Durch welche Daten n, t, ℓ, L waren in der Vorlesung ein SDP und sein Dual gegeben?

(b) Wie sah in der Vorlesung das zu den Daten aus (a) gehörige SDP (P) aus?

(c) Wie war in der Vorlesung das zu (P) duale SDP (D) definiert?

(d) Wie hängen die Daten $m, n, A_1, \dots, A_m, C, b_1, \dots, b_m$ aus der Literatur mit den Daten n, t, ℓ, L aus der Vorlesung zusammen?

(e) Bringe (P) und (D) mit (P_{lit}) und (D_{lit}) in Zusammenhang.

(f) Wo sind mehr Daten gegeben, in der Literatur oder in der Vorlesung?

(g) Warum ist der Unterschied zwischen Literatur und Vorlesung unwesentlich?

Aufgabe 2 (7 Punkte). Durch $a, b, c \in \mathbb{R}$ sei ein quadratisches Polynom

$$f := aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]_2$$

in einer Variablen X gegeben. Wir betrachten das polynomiale Optimierungsproblem

$$(P) \qquad \text{minimiere } f(x) \text{ über } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Schreibe die Lasserre-Relaxierung (P_2) zweiten Grades von (P) auf (also die erste Lasserre-Relaxierung).

(b) Schreibe (P_2) explizit als ein SDP.

(c) Zeige, dass (P_2) im Fall $a > 0$ genau eine optimale Lösung besitzt und diese eine 1-Quadraturformel besitzt, deren Stützstelle die optimale Lösung von (P) ist.

(d) Zeige $P_2^* = P^*$.

Aufgabe 3 (5 Punkte). Zeige, dass jedes $L \in \mathbb{R}[X]_2^*$ mit $L(\sum \mathbb{R}[X]_1^2) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $L(1) > 0$ eine 2-Quadraturformel besitzt, wobei $\mathbb{R}[X]_1$ und $\mathbb{R}[X]_2$ die Vektorräume der linearen und quadratischen Polynome in einer Variablen X bezeichnen.

Hinweis: Zu gegebenem $L \in \mathbb{R}[X]_2^*$ mit $L(1) = 1$ kann man $L' \in \mathbb{R}[X]_2^*$ definiert durch

$$L'(p) = L(p(X - L(X))) \text{ für alle } p \in \mathbb{R}[X]_2$$

betrachten. Denke an Erwartungswert und Varianz aus der Stochastik.

Aufgabe 4 (5 Punkte). Zeige, dass der Kegel $\sum \mathbb{R}[X,Y]^2 + \sum \mathbb{R}[X,Y]^2(1 - X^4 - Y^4)$ im Vektorraum $\mathbb{R}[X,Y]$ eine Einheit besitzt und benutze dabei nur in der Vorlesung *bewiesene* Resultate.

Abgabe heute am 30. Juli 2012 um 12:00 Uhr persönlich bei ihrem Übungsleiter.