Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2012

Sebastian Gruler
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 1 zur Polynomialen Optimierung

Aufgabe 1 (24 Punkte). Betrachte das polynomiale Optimierungsproblem

$$(P) \qquad \text{minimiere } x^3 + 9x^2 + 24x + 15 \text{ über } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x + 3 \geq 0.$$

(a) Füge zu (P) die beiden Scharen von redundanten Ungleichungen

$$(ax+b)^2 \geq 0 \qquad (a, b \in \mathbb{R}) \qquad \text{und} \tag{1}$$

$$(ax+b)^2(x+3) \geq 0 \qquad (a, b \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

hinzu.

(b) Finde symmetrische Matrixpolynome $P_1 \in S\mathbb{R}[X]^{2\times 2}$ und $P_2 \in S\mathbb{R}[X]^{2\times 2}$, so dass (1) und (2) durch die positive Semidefinitheit von $P_1(x)$ und $P_2(x)$ ausgedrückt werden.

(c) „Linearisiere“ (P) zu einem semidefiniten Programm

$$\begin{aligned} (P_1) \qquad \text{minimiere } & y_2 + 9y_1 + 24x + 15 \\ \text{über } & x, y_1, y_2 \in \mathbb{R} \\ \text{mit } & M_1(x, y_1) \succeq 0 \\ & M_2(x, y_1, y_2) \succeq 0, \end{aligned}$$

wobei $M_1 \in S\mathbb{R}[X, Y_1]^{2\times 2}$ und $M_2 \in S\mathbb{R}[X, Y_1, Y_2]^{2\times 2}$ lineare Matrixpolynome sind.

(d) Verschaffe Dir entweder Zugang zum PhymaMa-Rechnerpool[1] oder, falls Du MATLAB[2] auf Deinem Rechner hast[3], installiere dort die Spezifikationssprache YALMIP[4], und mindestens einen der beiden SDP-Solver SeDuMi[5] und SDPT3[6]. Nimm die Verzeichnisse von YALMIP und von mindestens einem der SDP-Solver in den Suchpfad von MATLAB auf. Starte mit dem Befehl `yalmipdemo` die Demonstration über Momentenrelaxierungen. Wiederhole dies solange bis es funktioniert. Arbeite im YALMIP-Wiki die Abschnitte “Basics” und “Semidefinite Programming” durch.

---

[1] `http://phyma.uni-konstanz.de/`
[2] `http://de.wikipedia.org/wiki/Matlab`
[3] Beachte, dass wir später unbedingt die Symbolic Math Toolbox für MATLAB brauchen, die in der Student Version enthalten ist.
[4] `http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/`
[5] `http://sedumi.ie.lehigh.edu/`
[6] `http://www.math.nus.edu.sg/~mattohkc/sdpt3.html`

(e) Lege eine Datei `hellosdp.m` an, die mit den Zeilen `sdpvar x` und `y=sdpvar(2,1)` beginnt. Definiere die Zielfunktion von (P_1) und die Matrizen M_1 und M_2 in den folgenden Zeilen dieser Datei. Löse (P_1) mit einem Aufruf von `solvesdp`.

(f) Benutze `double`, um den berechneten Optimalwert von (P_1) auszugeben. Stimmt er mit dem Optimalwert von (P) (bis auf numerische Fehler) überein?

(g) Linearisiere die Scharen (1) und (2) zu Scharen von linearen Ungleichungen. Auf diese Weise kann man (P_1) als ein „unendliches lineares Programm" mit unendlich vielen Nebenbedingungen interpretieren. Bezeichne $(x^*, y_1^*, y_2^*) =$ (`double(x)`,`double(y(1))`,`double(y(2))`) die errechnete optimale Lösung. Wie kann man aus den Matrizen

$$M_1(x^*, y_1^*) = \texttt{double(M1)} \text{ und } M_2(x^*, y_1^*, y_2^*) = \texttt{double(M2)}$$

erfahren, welche dieser unendlich vielen Nebenbedingungen in (x^*, y_1^*, y_2^*) *aktiv* sind (das heißt dort mit Gleichheit gelten)?

(h) Finde mit Hilfe der Erkenntnisse aus (g) endlich viele Ungleichungen der Form (1) und (2) derart, dass die zugehörige Linearisierung (P_2) von (P) ein lineares Programm mit $P_2^* = P^*$ ist. Löse dieses lineare Programm mit YALMIP.

Bemerkungen: Es ist geplant, reguläre Übungsblätter am 19. April, 3. Mai, 10. Mai, 24. Mai, 14. Juni und 28. Juni auszugeben. Die Bearbeitungszeit beträgt jeweils etwa zwei Wochen (dieses Mal nur gut eine Woche). Diese Blätter müssen schriftlich bearbeitet werden und werden bepunktet. Erstellter MATLAB-Code wird bei diesen Blättern nicht elektronisch abgegeben, sollte aber schriftlich vorliegen (handschriftlich oder beigehefteter Ausdruck). Auch zu Aufgaben wie 1(d) und 1(e) auf diesem Blatt müssen die gemachten Beobachtungen und überwundenen Probleme schriftlich dokumentiert werden. Jeder Teilnehmer muss die Lösungen eigenständig und individuell aufschreiben. Zusammenarbeit ist erlaubt, aber nicht beim Aufschreiben. Es müssen etwa die Hälfte der Punkte erreicht werden und der Teilnehmer muss in der Lage sein, seine Lösung in der Übungsgruppe zu präsentieren und zu erklären.

Zusätzlich ist geplant, am 26. April, 31. Mai und 21. Juni Programmieraufgaben auszugeben, die nur elektronisch in Form von gut dokumentiertem und lauffähigem MATLAB-Code (bzw. MuPAD-Code[7]) abgegeben werden können. Auch dort beträgt die Bearbeitungszeit jeweils etwa zwei Wochen.

Inwiefern bei den Programmieraufgaben Zusammenarbeit möglich ist, wird noch bekanntgegeben. Auch hier muss etwa die Hälfte der Punkte erreicht werden. Am Ende des Semesters gibt es eine Prüfung (wahrscheinlich schriftliche Klausur). Die erreichten Punkte in den regulären Übungen und den Programmierübungen werden in die erreichte Endnote eingerechnet.

Abgabe bis Freitag, den 27. April 2012, um 12:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411. Dies wird so bald wie möglich auf `http://www.math.uni-konstanz.de/~schweigh/lehre.html` bekanntgegeben.

---

[7] `http://de.wikipedia.org/wiki/MuPAD`