Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2012/2013

Sebastian Gruler
María López Quijorna
Markus Schweighofer

Übungsblatt 3 zur Reellen Algebraischen Geometrie I

Aufgabe 9. Kläre ausführlich alle Details in Beispiel 1.3.8 aus der Vorlesung.

Aufgabe 10. Für jeden Körper K bezeichne $\operatorname{sper}(K)$ jeweils die Menge seiner Anordnungen. Schreibe $\operatorname{sper}(\mathbb{R}(X)) = \{P_{\pm\infty}\} \cup \{P_{t\pm} \mid t \in \mathbb{R}\}$ wie in Beispiel 1.3.8 aus der Vorlesung. Betrachte die Abbildung

$$\Psi\colon \operatorname{sper}(\mathbb{R}(X)) \to \operatorname{sper}(\mathbb{Q}(X)),\ P \mapsto P \cap \mathbb{Q}(X)$$

und sei $Q \in \operatorname{sper}(\mathbb{Q}(X))$.

(a) Zeige, dass genau einer der folgenden Fälle eintritt:
  (1) $\Psi^{-1}(\{Q\}) = \{P_{-\infty}\}$
  (2) $\Psi^{-1}(\{Q\}) = \{P_{\infty}\}$
  (3) $\Psi^{-1}(\{Q\}) = \{P_{t-}\}$ für ein über $\mathbb{Q}$ algebraisches $t \in \mathbb{R}$
  (4) $\Psi^{-1}(\{Q\}) = \{P_{t+}\}$ für ein über $\mathbb{Q}$ algebraisches $t \in \mathbb{R}$
  (5) $\Psi^{-1}(\{Q\}) = \{P_{t-}, P_{t+}\}$ für ein über $\mathbb{Q}$ nicht algebraisches $t \in \mathbb{R}$

(b) Zeige, dass dabei Q genau dann archimedisch ist, wenn der letzte Fall (5) eintritt.

Aufgabe 11. Finde einen euklidischen Körper, der nicht reell abgeschlossen ist.

Hinweis: Ein Körper R heißt *reell abgeschlossen*, wenn er euklidisch ist und wenn jedes Polynom *ungeraden* Grades aus $R[X]$ eine Nullstelle in R hat.

Abgabe bis Donnerstag, den 15. November, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411 .