Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2012/2013

Christoph Hanselka
Markus Schweighofer

Übungsblatt 5 zur Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Aufgabe 1. (Ein quantitatives Lokal-Global-Prinzip) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. Diese Aufgabe zeigt die Nützlichkeit der *booleschen Fouriertransformation*, das heißt der Fouriertransformation auf der Gruppe G. Bezeichne mit μ_1 und μ_2 jeweils das uniforme Wahrscheinlichkeitsmaß (also das normierte Zählmaß) auf G und $G \times G$. Wir definieren den *Abstand* zweier Funktionen $f, g \colon G \to \{\pm 1\}$ als $d(f,g) := \mu_1(\{x \in G \mid f(x) \neq g(x)\})$.

(a) Zeige, dass die irreduziblen Charaktere von G genau die Gruppenhomomorphismen von G nach $\{\pm 1\}$ sind.

(b) Zeige $\langle f, g \rangle = 1 - 2d(f,g)$ in $L(G)$ für alle $f, g \colon G \to \{\pm 1\}$.

(c) Sei $f \colon G \to \{\pm 1\}$ und $\Delta := \{(x,y) \in G^2 \mid f(x+y) \neq f(x)f(y)\}$. Zeige, dass es ein $\chi \in \widehat{G}$ gibt mit $d(f,\chi) \leq \mu_2(\Delta)$.

Hinweis: Beachte $\mu_2(\Delta) = \frac{1}{2}\int_{G\times G}(1 - f(x)f(y)f(x+y))d\mu_2(x,y)$, verwende die Definition der Faltung, die Eigenschaften der Fouriertransformation und zweimal die Formel von Plancherel.

Bemerkung: (c) besagt, dass der Abstand von f zum nächsten Homomorphismus höchstens so groß ist, wie die Wahrscheinlichkeit, dass f für ein zufälliges Paar $(x,y) \in G^2$, die Homomorphiebedingung verletzt. Mit anderen Worten: Erfüllt f nahezu überall lokal die Homomorphiebedingung, so ist f global gesehen sehr nahe an einem Homomorphismus.

Aufgabe 2. Ein Ring R heißt *Schiefkörper*, wenn $R^\times = R \setminus \{0\}$.

(a) Zeige, dass es (bis auf Isomorphie) genau eine achtelementige Gruppe $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ gibt mit folgenden Eigenschaften: 1 ist das neutrale Element, $(-1)^2 = 1$, $g^2 = -1$, $-g = (-1)g$ für alle $g \in \{i,j,k\}$ und $ijk = -1$. Diese Gruppe nennt man die *Quaternionengruppe*.

(b) Zeige, dass es eine irreduzible Darstellung $\varrho \colon Q \to U_2$ gibt mit

$$\varrho(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varrho(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimme die Charaktertafel und die irreduziblen Darstellungen von Q.

(d) Zeige, dass der von $\varrho(Q)$ erzeugte $\mathbb{R}$-Untervektorraum $\mathbb{H}$ von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ ein Schiefkörper ist. Man nennt $\mathbb{H}$ den Schiefkörper der *hamiltonschen Quaternionen*.

Hinweis: Betrachte M^*M für $M \in \mathbb{H}$.

Abgabe bis Montag, den 14. Januar, um 11:44 Uhr in die Zettelkästen neben F411.