Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2011

Christoph Hanselka
Aaron Kunert
Markus Schweighofer

Übungsblatt 10 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1.
Sei K ein algebraischer Zahlkörper mit Zahlring R.

(a) Für alle Ideale $I \neq 0$ von R ist R/I endlich.

(b) Für alle $\mathfrak{p} \in M_R$ und $k \in \mathbb{N}$ ist $\mathfrak{p}^{k-1}/\mathfrak{p}^k$ ein eindimensionaler $R/\mathfrak{p}$–Vektorraum.

(c) Für alle $\mathfrak{p} \in M_R$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\#(R/\mathfrak{p}^n) = (\#(R/\mathfrak{p}))^n$.

(d) Für alle Ideale $I, J \neq 0$ von R gilt $\#(R/(IJ)) = (\#(R/I))(\#(R/J))$.

Aufgabe 2.
Sei K ein quadratischer Zahlkörper mit Zahlring R und $p \in \mathbb{P}$.

(a) Zeige: Entweder ist (p) ein Primideal von R oder ein Produkt aus zwei (nicht notwendigerweise verschiedenen) Primidealen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ von R.

(b) Ist $(p) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ mit Primidealen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ von R, so zeige man

$$\mathfrak{p}_1 \in P_R \iff \mathfrak{p}_2 \in P_R \iff \exists x \in R : |N_{K|\mathbb{Q}}(x)| = p.$$

(c) Ist p prim in R, so ist $R/(p) \cong \mathbb{F}_{p^2}$.

Aufgabe 3.
Sei A ein Dedekindring, $K = \mathrm{qf}(A)$, $M \subseteq M_A$ endlich und $\alpha \in \mathbb{Z}^M$. Zeige, dass ein $x \in K$ existiert mit $v_\mathfrak{p}(x) = \alpha(\mathfrak{p})$ für alle $\mathfrak{p} \in M$. Folgere daraus, dass ein Dedekindring mit nur endlich vielen Primidealen ein Hauptidealring ist.

Hinweis: Reduziere auf den Fall $\alpha(\mathfrak{p}) \geq 0$ für alle $\mathfrak{p} \in M$ und verwende den Chinesischen Restsatz.

Abgabe bis Montag, den 27. Juni 2011, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.