Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2011

Christoph Hanselka
Aaron Kunert
Markus Schweighofer

Übungsblatt 5 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1.
Sei

$$U := \mathbb{Z}\begin{pmatrix}1\\2\\5\\3\end{pmatrix} + \mathbb{Z}\begin{pmatrix}2\\10\\16\\12\end{pmatrix} + \mathbb{Z}\begin{pmatrix}1\\-10\\-7\\-9\end{pmatrix} \subseteq \mathbb{Z}^4.$$

und

$$V := \mathbb{Z}\begin{pmatrix}5\\15\\5\end{pmatrix} + \mathbb{Z}\begin{pmatrix}10\\40\\10\end{pmatrix} + \mathbb{Z}\begin{pmatrix}-10\\80\\20\end{pmatrix} \subseteq \mathbb{Z}^3.$$

(a) Finde ein direktes Produkt G von zyklischen Gruppen und einen Gruppenisomorphismus

$$f\colon \mathbb{Z}^4/U \longrightarrow G.$$

(b) Finde eine direkte Summe H von einfachen $\mathbb{Z}$–Moduln und einen $\mathbb{Z}$–Isomorphismus

$$h\colon \mathbb{Z}^3/V \longrightarrow H.$$

Aufgabe 2.
Sei

$$A := \begin{pmatrix} X-1 & X^2-1 & 0 \\ X^3-X^2+X-1 & X^4+X^2-2 & X^2-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}[X]^{2\times 3}.$$

(a) Berechne die Smithsche Normalform von A und gebe entsprechende Übergangsmatrizen an.

(b) Zeige $\mathbb{Q}[X]^2/\operatorname{im}(A) \cong \mathbb{Q}^3$ als $\mathbb{Q}$–Vektorraum.

Aufgabe 3.
Sei R ein kommutativer Ring und M,N Moduln über R. Dann bildet $\operatorname{Hom}(M,N)$ mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation einen R–Modul.

Aufgabe 4.
Sei R ein Ring und M ein R–Modul.

(a) Ist $A \in R^{m\times n}$, $B \in R^{n\times r}$ und $X \in M^{r\times s}$, so gilt $(AB)X = A(BX)$.

(b) $R^{r\times r}$ ist ein Ring mit $1 = I_r$.

(c) $M^{r\times s}$ ist ein $R^{r\times r}$–Modul.

Abgabe bis Montag, den 23. Mai 2011, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.