Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Dr. Sven Wagner

Sommersemester 2010
Übungsblatt 15
19.04.2010

Lineare Algebra II

Aufgabe 15.1:

Sind die folgenden Relationen $\preceq$ Halbordnungen auf den angegebenen Mengen A? Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) A sei die Menge aller Untergruppen einer gegebenen abelschen Gruppe G und für $H, I \in A$ definieren wir $H \preceq I :\iff H$ ist Untergruppe von I.

(b) $A := \mathbb{R}$ und für $a, b \in A$ definieren wir $a \preceq b :\iff$ es existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $b = a + n$.

(c) $A := \mathbb{Z}$ und für $a, b \in A$ definieren wir $a \preceq b :\iff$ es existiert ein $c \in \mathbb{Z}$ mit $b = ac$ („a teilt b in $\mathbb{Z}$“).

Aufgabe 15.2:

Für folgende Teilmengen der jeweils angegebenen halbgeordneten Menge $(A, \preceq)$ ist folgendes zu tun: Klären Sie, ob es sich um eine Kette handelt. Bestimmen Sie die Mengen ihrer unteren und oberen Schranken. Geben Sie alle ihre minimalen und maximalen Elemente an. Bestimmen Sie, sofern existent, jeweils ihr Infimum, Supremum, ihr Minimum und ihr Maximum.

(a) $\{\{1, 2, 3\}, \{2\}, \{2, 5\}\}$, wobei $(A, \preceq) = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ sei

(b) $\{[\frac{1}{n}, 1] \mid n \in \mathbb{N}\}$, wobei $(A, \preceq) = (\mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq)$ sei

(c) $\{-n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, wobei $(A, \preceq) = (\mathbb{Q}, \leq)$ sei

(d) $\{-6, -3, -2, 1, 2, 4, 5\}$, wobei $A = \mathbb{Z}$ sei und wir für $a, b \in \mathbb{Z}$ definieren $a \preceq b :\iff$ ((a, b ungerade und $a \leq b$) oder (a, b gerade und $b \leq a$)).

Aufgabe 15.3:

Sei A ein kommutativer Ring.

(a) Man nennt ein Ideal I von A **echt**, wenn $I \neq A$. Zeigen Sie, dass ein Ideal I von A genau dann echt ist, wenn $1 \notin I$ gilt.

(b) Sei $\mathcal{I}$ die durch Inklusion halbgeordnete Menge der echten Ideale von A. Man nennt ein Ideal **maximal**, wenn es ein maximales Element von $\mathcal{I}$ ist. Zeigen Sie mit dem Zornschen Lemma, dass jeder kommutative Ring mit $1 \neq 0$ ein maximales Ideal besitzt.

Aufgabe 15.4:

Seien M und N Mengen.

(a) Betrachten Sie die Menge A aller injektiven Abbildungen $f\colon D_f \to N$ mit $D_f \subseteq M$ und zeigen Sie, dass durch

$$f \preceq g :\iff D_f \subseteq D_g \text{ und } f = g|_{D_f} \qquad (f\colon D_f \to N,\ g\colon D_g \to N)$$

eine Halbordnung auf A definiert wird.

Bitte wenden.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes maximale Element $f\colon D_f \to N$ von A gilt: $D_f = M$ oder f ist surjektiv.

(c) Benutzen Sie das Lemma von Zorn, um zu zeigen, dass es stets eine Injektion $M \to N$ oder eine Injektion $N \to M$ gibt.

Abgabe bis Montag, den 26. April, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.