Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2010/2011

Dr. Andrew Dolphin
Prof. Dr. Markus Schweighofer

Übungsblatt 13 zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1. Zeige

(a) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2},\mathbb{i})|\mathbb{Q}) \cong V_4$.

(b) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})|\mathbb{Q}) \cong \{1\}$.

(c) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2},\mathbb{i})|\mathbb{Q}(\mathbb{i})) \cong C_4$.

Hinweis: Betrachte für (c) alle Körpererweiterungen die man aus die vier Körpern $\mathbb{Q}$,$\mathbb{Q}(\mathbb{i})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2},\mathbb{i})$ bilden, bestimme die Grade dieser Körpererweiterungen durch Benutzung der Grad formel und des Kriteriums von Eisenstein und zeige, dass $\mathbb{Q}(\mathbb{i},\sqrt[4]{2})|\mathbb{Q}$ normal ist.

Aufgabe 2. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha^4 = 5$. Zeige, dass

(a) $\mathbb{Q}(\mathbb{i}\alpha^2)$ normal über $\mathbb{Q}$ ist.

(b) $\mathbb{Q}(\alpha + \mathbb{i}\alpha)$ normal über $\mathbb{Q}(\mathbb{i}\alpha^2)$ ist.

(c) $\mathbb{Q}(\alpha + \mathbb{i}\alpha)$ nicht normal über $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe und $a,b \in G$. Gelte $ab = ba$ und seien die Ordnungen von a und b teilerfremd (d.h. $1 \in (\mathrm{ord}\, a, \mathrm{ord}\, b)$). Zeige, dass $\mathrm{ord}\,(ab) = (\mathrm{ord}\, a)(\mathrm{ord}\, b)$.

Aufgabe 4. Sei K ein endlicher Körper. Zeige, dass

$$K = \{b^2 + c^2 \mid b,c \in K\}.$$

Abgabe bis Montag, den 31. Januar 2011, vor der Vorlesung.