Universität Konstanz Dr. Andrew Dolphin
Fachbereich Mathematik und Statistik Prof. Dr. Markus Schweighofer
Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 7 zur Einführung in die Algebra

Aufgabe 1. Sei R ein kommutativer Ring. Sei $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Ideal. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathfrak{p}$ ist prim.

(ii) $\mathfrak{p}$ echt und für alle Ideale I,J von R mit $IJ \subseteq \mathfrak{p}$ gilt $I \subseteq \mathfrak{p}$ oder $J \subseteq \mathfrak{p}$.

(iii) $R \setminus \mathfrak{p}$ ist eine multiplikative Menge.

Aufgabe 2. Seien A und B kommutative Ringe und $\varphi : A \to B$ ein Epimorphismus. Zeige, dass die Zuordnungen

$$I \mapsto \varphi(I) \quad \text{und} \quad J \mapsto \varphi^{-1}(J)$$

eine Bijektion zwischen der Menge der Ideale/Primideale/max. Ideale I von A mit $\ker(\varphi) \subseteq I$ und der Menge der Ideale/Primideale/max. Ideale von B vermitteln.

Aufgabe 3. Sei A ein kommutativer Ring und $S \subseteq A$ multiplikativ. Zeige, dass die Zuordnungen

$$\mathfrak{p} \mapsto \overline{S}^{-1}\iota_S(\mathfrak{p}) := \left\{ \frac{\overline{a}}{\overline{s}} \,\middle|\, a \in \mathfrak{p}, s \in S \right\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{q} \mapsto \iota_S^{-1}(\mathfrak{q})$$

eine Bijektion zwischen der Menge der Primideale $\mathfrak{p}$ von A mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ und der Menge der Primideale von A_S vermitteln.

Aufgabe 4. Sei R ein faktorieller Ring. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in R$ mit

$$x = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$$

mit $p_i \in R$ prim und paarweise nicht assoziiert und $\alpha_i \in \mathbb{N}$. Sei

$$y := p_1 \dots p_n.$$

Zeige, dass

$$\sqrt{(x)} = (y).$$

Abgabe bis Montag, den 6. Dezember 2010, vor der Vorlesung.